FIZIKAI LABORATÓRIUMI GYAKORLATOK

Sáray István

1. Bevezetés

A bevezető jellegű hallgatói laboratóriumi gyakorlatok célja :

- bepillantást nyújtani hallgatók számára a tudományos ismeretszerzés mechanizmusába, és megvilágítani a kísérleti megközelítés jelentőségét,
- elősegíteni az előadáson hallott anyag jobb megértését a tanult elméleti formulák alkalmazása és/vagy kísérleti igazolása által,
- megismertetni a mérési hiba és mérési bizonytalanság fogalmát,
- bevezetni a hallgatókat a kiértékelésnek, az eredmények bemutatásának, közlésének módszereibe,
- megismertetni a hallgatókat különféle mérőeszközökkel és mérési eljárásokkal,
- felkelteni a hallgatók érdeklődését a kisérleti fizika iránt,
- konkrét kísérleti procedúrák megismertetésével segítséget nyújtani majdani oktatómunkájukhoz.

2. Jegyzőkönyvkészítés

A mérés során a nyers mérési adatokat a laborfüzetbe jegyezzük fel. Ugyanide írunk be minden egyéb olyan információt, ami esetleg fontos lehet a mérés szempontjából.

A mérési adatokat célszerű és ajánlott táblázatok formájában rögzíteni, ez elősegíti az áttekinthetőséget, és a kiértékelést is megkönnyíti.

Mintatáblázat az adatok lejegyzéséhez:

tömeg	terhelés	megnyúlás, cm				illesztett	eltérés
m(i) kg	x(i) N	1. sorozat	2. sorozat	3. sorozat	átlag	a*x+b	δx(i)

A mérésről a laborfüzet felhasználásával jegyzőkönyvet kell készíteni. Ennek az a célja, hogy a mérési eredmények, és a levont tanulságok, következtetések későbbi időkre valamint mások számára is hozzáférhetővé váljanak.

A jegyzőkönyv fejlécében szerepelnie kell :

- a mérés időpontjának, a jegyzőkönyv készítőjének, a mérést végző személyek nevének, A jegyzőkönyv további részét az alábbi pontok szerint szerkesszük meg:
- a mérés címe,
- a mérési feladat kitűzése,
- a felhasznált fontosabb mérőeszközök felsorolása,
- a mérési eljárás rövid leírása,
- a mérési adatok lehetőleg táblázatos megadása,továbbá
- a hibaforrások megjelölése és, ahol csak lehetséges, a mérési bizonytalanságok értékeinek megadása,
- a kiértékelési procedura részletes, más számára is követhető módon való leírása, amely magábafoglalja a hibaszámítást is,
- a kiértékelt mérési eredményeknek a táblázatos közlése, végül
- a diszkusszió, amelyben értékeljük saját eredményeinket, magyarázatokat fűzünk hozzájuk, és következtetéseket vonunk le belőlük.

Az eredmények bemutatására táblázatokat és grafikonokat célszerű és kell alkalmazni. Az eredmény táblázatokban már csak azokat az értékeket adjuk meg (bizonytalanságaikkal együtt), amelyek meghatározása célként volt kitűzve. Szerepeltetnünk kell a különböző módszerekkel mért saját mérési eredményeink mellett az összehasonlításra alkalmas idegen adatokat is. Mindez megkönnyíti a diszkusszió elvégzését is.

Eredménytáblázat minta:

fizikai mennyiség	mérési módszer				
	Hagen-Poiseuille	Stokes			Irodalmi
		D1	D2	D3	
η(viszkozitás)					
$\Delta\eta$					
Reynolds szám					

3. Kiértékelés

A mérés kiértékelése azt jelenti, hogy

- a leolvasott nyers mérési adatokon végzett korrekciós számítások után, átlagértékképzés vagy egyéb e jegyzetben leírt módon, meghatározzuk a mért adatok úgynevezett "legjobb értékeit" és azok bizonytalansági intervallumát, röviden: bizonytalanságát.
- Ezen értékekből kiindulva meghatározzuk a mért jelenséget leíró, előzetesen ismert vagy feltételezett függvényben szereplő ismeretlen paramétereket és azok bizonytalanságait.

Egyszerű mérés: valamely fizikai mennyiség adott körülményekre vonatkozó legjobb értékének és ezen legjobb érték bizonytalansági intervallumának a meghatározása. Ilyennel találkozunk pl. sűrűségméréskor, a felületi feszültség vagy a viszkozitás mérésekor, stb.

Összetett mérés: fizikai mennyiségek közötti összefüggést leíró függvény paramétereinek, valamint e paraméterek bizonytalansági intervallumának meghatározása egyszerü mérések sorozatával kapott adatok alapján.(Pl. Fletcher kocsi, forgómozgás, Hooke törvény stb.)

A mérési bizonytalanság a mérési adat fontos jellemzője. Arról ad tájékoztatást, hogy az illető számadat mennyire megbízhatóan képviseli azt az értékhalmazt, amelyet mérési eredményként megadhatunk. A mérési bizonytalanság eredete az, hogy a műszerről, a mérendő objektumról illetve a mért jelenségről, annak környezetéről, körülményeiről szükségképpen mindíg csak korlátozottak az ismereteink.

A mérési hiba és a mérési bizonytalanság fogalma nem teljesen fedi egymást, habár gyakran szinonímaként használják őket. A mérési hiba elnevezés inkább azokra a pontatlanságokra, eltérésekre illik rá, amelyekeket – legalább is elvben – el lehet kerülni, illetve ki lehet küszöbölni. Ezeket rendszeres hibáknak nevezzük. A mérési bizonytalanság ezzel szemben legfeljebb csak csökkenthető a jelenségről vagy a műszerről megszerzett információ növelésével, de még elvben sem küszöbölhető ki teljesen.

3.1. A legjobb érték és a mérési bizonytalanság meghatározásának módja egyszerű mérés esetén

Legyen

$$X(1), X(2), X(3), \ldots X(N)$$

N db, ugyanazon körülményre vonatkozó nyers mérési adat. Ugyanezen mérési adatok a rendszeres hibák figyelembevétele és a korrekciók elvégzése után:

$$x(1), x(2), x(3), \ldots x(N).$$

Ebből az adatsorból, alkalmas kiválasztó kritérium alapján, meghatározzuk az ún. legjobb értéket. Kiválasztó elv gyanánt leggyakrabban az un. legkisebb négyzetes eltérés kritériumát alkalmazzuk, azaz megköveteljük, hogy a

$$\sum_{k=1}^{N} (x(k) - \overline{x})^2$$

összeg minimális legyen akkor, amikor a mérési eredményként tekintett $\overline{x}$ felveszi legjobb értékét. Szélsőértékszámítással adódik, hogy az e kritérium szerinti legjobb értéket a korrigált mért értékek számtani középértéke adja:

$$\overline{x} = \sum_{k=1}^{N} \frac{x(k)}{N}$$

Meg kell jegyezni, hogy más kiválasztó elvek is léteznek, illetve elképzelhetők, de minden kiválasztó kritérium elkerülhetetlenül bizonyos önkényességet rejt magában.

Az azonos körülmények között elvégzett mérések során kapott $x(k)$ korrigált mért értékeknek a legjobb értéktől való eltéréseit véletlen hatásoknak tulajdonítjuk. Az ebből származó mérési bizonytalanságot az átlagtól való eltérések négyzetének átlagával jellemezhetjük

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{k=1}^{N} [x(k) - x]^2}{N}$$

Ezt a mennyiséget empirikus szórásnégyzetnek nevezzük.

A σ empirikus szórás önmagában még nem tekinthető a mért értékek bizonytalanságának. Egyrészt a mérési bizonytalanság jóval nagyobb az eltérések átlagánál, annak kb. háromszorosa:

$$\Delta \approx 3\sigma,$$

másrészt minden egyes mérésnek önmagában is van bizonytalansága, amely pl. N=1 esetben is fellép. Ez utóbbi -eredete szerint- többféle lehet:

- Minden műszer felbontóképessége, azaz két legközelebbi, még biztonsággal megkülönböztethető leolvasási értékének különbsége véges. Az ebből eredő bizonytalanság

  $$\Delta_{műszer}$$

  a műszerbizonytalanság, illetve felbontóképesség. Gyári készülékeknél ez kézikönyvekből állapítható meg; leggyakrabban a két legközelebbi skálaosztás fele. Igy a legtöbb tolómérő esetében pl. $\Delta_{műszer}$=0.025mm.

- A mért mennyiség természetéből, pontosan nem definiálható mivoltából adódó bizonytalanság:

  $$\Delta_{saját}$$

  Ilyen hibatípus pl. nem pontosan definiálható alakú tárgyak méreteinek, pl. kapilláris cső hosszának meghatározásakor. Ilyen probléma lép fel mechanikai anyagjellemzők megmérésekor is, amikoris a minták befogási pontja nem definiálható jól.

- Egyéb, rendkívül változatos eredetű környezeti, emberi stb. tényezők, amelyek felderítése és meghatározása csak a konkrét helyzet ismeretében lehetséges.Ilyen lehet pl. a reakcióidő és a leolvasási pontatlanság. Az ebbe a kategóriába sorolható bizonytalanság jelzése:

  $$\Delta_{egyéb}.$$

Ha a felsorolt hatások egymástól függetlennek tekinthetők, akkor az eredő bizonytalanság a

$$\Delta^2 = \Delta^2_{stat} + \Delta^2_{műszer} + \Delta^2_{saját} + \Delta^2_{egyéb}$$

formula alapján számolható.

Az eddig tárgyalt egyszerű mérésnél két szélsőséges esetet érdemes külön is megvizsgálni:

1. Determinisztikus jellegű mérési objektumoknál / folyamatoknál az ismételt mérések nem adnak lényegesen különböző értékeket, azaz feltételezhetjük, hogy

   $$\Delta_{stat} \approx 0.$$

   Ez a helyzet pl. akkor , amikor kis feloldóképességű műszerrel végzünk méréseket precíziós, mérettartó tárgyakon, vagy ha fizikai mennyiségek mérését végezzük jól ellenőrizhető körülmények között.

2. Ha viszonylag jó felbontóképességű mérőeszközökkel végzünk méréseket olyan feltételek között, amikor a véletlen hatások döntőek, akkor

$$\Delta_{műszer} \approx 0, \quad \Delta_{saját} \approx 0, \quad \Delta_{egyéb} \approx 0.$$

3.2. A kiértékelés és a mérési bizonytalanság meghatározása összetett mérés esetén

Az összetett mérés egyszerű mérések sorozatából áll, amelyeket különböző körülmények között végzünk el. Minden egyes egyszerű méréshez tartozik egy legjobb érték, ezek a legjobb értékek azonban többnyire nem függetlenek egymástól, hanem a vizsgált folyamatnak megfelelő összefüggés áll fenn közöttük. Rendszerint van bizonyos előzetes tudásunk ezen összefüggésnek a matematikai alakjáról, amelyeknek a legjobb értékek várhatóan eleget fognak tenni. A kiértékelés tehát abból áll, hogy a feltételezett összefüggésben szereplő paramétereket alkalmas kiválasztó kritérium alapján úgy határozzuk meg, hogy a függvény görbéje a lehető legjobban illeszkedjen a mért értékekhez.

A leggyakrabban alkalmazott kiválasztó kritérium az egyszerű mérésnél is alkalmazott legkisebb négyzetes eltérés kritériuma, azaz megköveteljük, hogy a

$$\sum_{i=1}^{n} \left[y_i - f\left(x_i\right)\right]^2$$

összeg legyen minimális. Itt $f(x)$ a feltételezett összefüggés, n pedig a mérési pontok száma. Az $f(x)$ függvény konkrét alakjának ismeretében a benne szereplő paraméterek legjobb értékeit szélsőértékszámítással határozhatjuk meg.

Legyen pl. $f(x) = a + bx$, akkor a kérdéses paraméterek és bizonytalanságaik az alábbi képletekből számíthatók:

$$a = \frac{\sum {x_i}^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{D}$$

$$b = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{D}$$

$$\Delta_a = \sqrt{\frac{{\sigma_y}^2 \sum x_i^2}{D}}$$

$$\Delta_b = \sqrt{\frac{n {\sigma_y}^2}{D}}$$

Itt n az adatpárok száma,

$$D = n \sum {x_i}^2 - \left(\sum x_i\right)^2$$

és

$${\sigma_y}^2 = \frac{\sum \left(y_i - b - a x_i\right)^2}{n-2}.$$

A mérési pontokra való illeszkedés jóságát az "r" korrelációs együttható fejezi ki:

$$r = \frac{\sum \left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_i - \bar{y}\right)}{\sqrt{\sum \left(x_i - \bar{x}\right) \sum \left(y_i - \bar{y}\right)^2}}.$$

A korrelációs együttható értéke 0 és 1 között változhat. Az illeszkedés annál jobb, minél jobban megközelíti r értéke az 1-et.

Az a és b paraméretek hibáinak számítással való meghatározása hosszadalmas. Sokkal egyszerűbben elvégezhető a hibabecslés grafikus módszerrel az alábbiak szerint.

Az a és b paraméter bizonytalansága a következőképpen becsülhető a már megrajzolt grafikon alapján (paralelogramma illetve téglalap módszer:

Megrajzoljuk a mérési pontok un. befoglaló paralelogrammáját, amelynek függőleges oldalpárja a legszélső abszcisszájú pontokon halad át, az illesztett egyenessel párhuzamos oldalait pedig az egyenes fölött és alatt, a tőle legtávolabb eső mérési pontokon át húzzuk meg az illesztett egyeneshez képest *szimmetrikusan.* A b paraméter bizonytalansági intervallumát a befoglaló paralelogramma két átlójának meredekségei, az a paraméter bizonytalanságát pedig a paralelogramma tengelymetszetei határolják be.

Előfordul, hogy a mérési pontok olyan jól illeszkednek a regressziós egyenesre, hogy a befoglaló paralelogramma megrajzolása nehézségekbe ütközik. Ilyenkor helyesebb külön grafikont készíteni a mérési bizonytalanság meghatározásához oly módon, hogy a függőleges tengelyen a $\Delta y_i = y_i - (ax_i - b)$ eltéréseket tüntetjük fel megfelelően kinagyított léptékekben. Ebben az esetben a mérési pontok a $\Delta y - x$ koordinátarendszer abszcisszája körüli *szimmetrikus* téglalapban helyezhetők el. Az b meredekség bizonytalanságát a befoglaló téglalap átlójának meredeksége adja. Amennyiben a meredekség hibájának a meghatározása a feladat, a paralelogramma vagy téglalap módszer alkalmazását ajánljuk a hallgatóknak. Meg kell jegyezni, hogy az imént leírt görbeillesztéses módszernél, valójában csak a statisztikus hibát vettük figyelembe, pedig az egyes x_i y_i-adatok tartalmazhatnak bármilyen más természetű, egyedi hibát is. Ez azonban nem jelent elvi problémát, mivel a nem statisztikus hibákat mindig át tudjuk alakítani statisztikus hibává oly módon, hogy az adott hibaintervallumon belül több, egymástól kissé eltérő adatot veszünk fel az adatlistára. Ezt az eljárást azonban nem alkalmazzuk a gyakorlataink során, bízva abban, hogy a statisztikus hiba sokkal nagyobb, mint az összes ettől eltérő típusú hiba.

3.3. A mérési eredmény és a mérési bizonytalanság felírásának módja

A számításokban és a végeredmény felírásában kerüljük a túlzott látszólagos pontosságot. Nemzetközi konvenció szerint az eredményeket annyi tizedessel írjuk fel, hogy az utolsó előtti jegy még biztos kell legyen, az utolsó jegyben pedig már lehet eltérés. Ennél több vagy kevesebb tizedesjegy felírása értelmetlen és helytelen, mert megtéveszti az olvasót az elért pontosságot illetően.

A mérési bizonytalanság felírásának szabálya is ehhez igazodik, azaz ha a hibát abszolút számokban fejezzük ki, akkor a tizedes jegyek száma ugyanannyi lehet , mint a mérési eredményé. Nem helyes tehát pl. az adatoknak efféle megadása:

$$a = 1.24584 \pm 0.02 \text{vagy} a = 1.24 \pm 0.025174$$

Helyesen pl. igy:

$$a = 1.24 \pm 0.03$$

Százalékos megadás esetén a hiba két tizedesnél lehetőleg ne legyen több.

3.4. Hibaterjedés

A mérési feladatként kitűzött fizikai mennyiséget rendszerint nem tudjuk közvetlenül megmérni, hanem csak valamilyen képletből tudjuk kiszámítani azt. Például sűrűségméréskor tömeget, és geometriai méreteket mérünk, és ezekből számítással kapjuk meg a sűrűséget. Legyenek x, y, z az elsődlegesen mért korrigált adatok, és bizonytalanságaik rendre $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ pozitív számok. Feladatunk az $f = f(x, y, z)$ mennyiség hibájának meghatározása az $f(x, y, z)$ függvény ismeretében. Feltételezve, hogy a $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ mérési bizonytalanságok kicsinyek a függvény változási sebességéhez képest, a hibák összeadódásánál a legrosszabb esetet véve az egyes hibajárulékok abszolút értékei adódnak össze:

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \Delta z.$$

A fenti összefüggés helyességét a valószínűségelméletnek a szórásra vonatkozó tételei alapján is igazolhatjuk.

A formula alkamazásaként legyen pl. f= xyz. Ekkor a képletből:

$$\frac{\Delta f}{|f|} = \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta y}{|y|} + \frac{\Delta z}{|z|},$$

vagyis a relatív hibák összeadódnak, ha a meghatározandó mennyiség a mért értékek szorzata. Ugyanezzel a formulával az adódik, hogy összeg vagy különbség bizonytalansága az abszolút értékek bizonytalanságainak az összege.

4. Alapmérőeszközök és alapmérések

4.1. Tömegmérés mérleggel

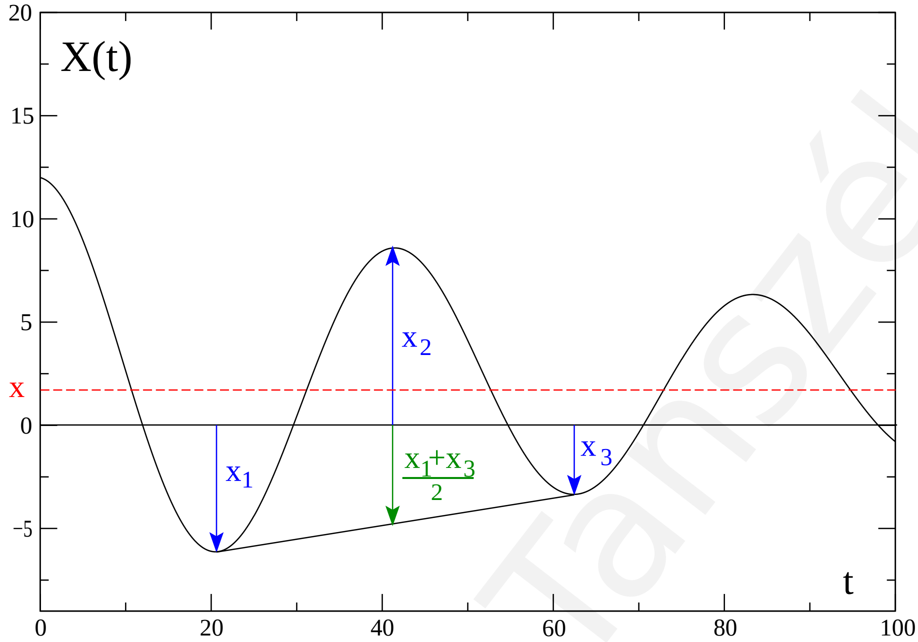
A terhelést pontosan kiegyensúlyozó m tömeg meghatározása közvetlenül, egy lépésben általában nem lehetséges, mert a különböző lehetséges súlyösszeállítások diszkrét sorozatot alkotnak. A mérlegelés tehát abból áll, hogy egyrészt a mérleghez tartozó súlysorozatból álló súlykombinációval igyekszünk a mérleg mutatóját a mérleg skáláján belülre hozni, másrészt a fennmaradó tömegkülönbséget pedig a mérleg lengési középpontjának a terheletlen állapothoz képesti eltolódásából határozhatjuk meg. A mérleg lengési középpontja a következőképpen értelmezhető: a mérleg mutatója lassan csillapodó lengéseket végez, amely az

$$x(t) = x + Ae^{-t/\tau} \sin \omega t$$

képlettel írható le. A képletben x a mindenkori lengési középpontot jelöli.Ha a csillapodási idő nagy, akkor az x lengési középpont az ábrából következően jó közelítéssel az

$$x = \frac{\frac{x_1+x_3}{2} + x_2}{2}$$

szerint határozható meg, ahol az $x1, x2, x3$ előjeles számok a mérleg mutatójának egymást követő legnagyobb kitérései skálaértékekben kifejezve.



Az x lengési középpont mindenkori értéke természetesen függ a mérlegkarok terhelésétől, pontosabban a karok eltérő mértékű terhelésétől. A terheletlen, vagy az elméletileg pontosan kiegyensúlyozott mérleg lengési középpontja a mérleg $x(0)$ egyensúlyi helyzete:

$$x(0) = \frac{\frac{x_1(0)+x_3(0)}{2} + x_3(0)}{2}.$$

Itt az $x(0)$ jelölés az $m = 0$ terhelésre, nem pedig a $t = 0$ időre utal! Ha a páratlan indexek pl. a baloldali, negatív kilengéseket jelzik, és $|x_2(0)| = \left|\frac{x_1(0)+x_3(0)}{2}\right|$, akkor $x(0) = 0$.

Legyen $M(1)$ illetve $M(2)$ két szomszédos, súlysorozatból összeállítható tömeg, amelyekre teljesül az, hogy a kilengések skálán belül maradnak. Ekkor a terhelést pontosan kiegyensúlyozó tömeg értéke líneáris interpolációval határozható meg:

$$m = M(1) + \frac{M(2) - M(1)}{x(2) - x(1)}(x(0) - x(1)).$$

Itt $x(1)$ és $x(2)$ az $M(1)$ illetve $M(2)$ tömegekhez tartozó lengési középpontok, $x(0)$ pedig a terheletlen mérleg lengési középpontja.

Az m meghatározására szolgáló másik módszer az érzékenység fogalmának felhasználásán alapszik. Ha a mérleg érzékenysége $E, M(1)$ pedig egy, súlysorozatból összerakható közelítő tömegérték, akkor a pontos kiegyensúlyozó tömeg:

$$m = M(1) + \frac{x(1) - x(0)}{E}.$$

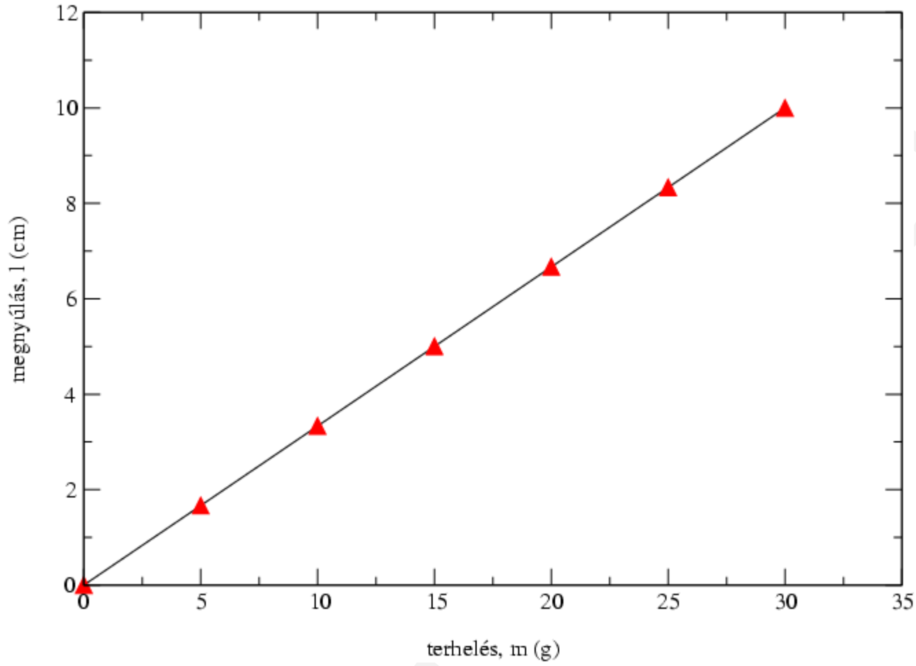
Az érzékenység meghatározása úgy történik, hogy az üres mérlegre akkora μ tömeget helyezünk, hogy a kitérés még éppen a skálán belül legyen, és leolvassuk a lengési középpont $x - x(0)$ eltolódását. Ezzel:

$$E = \frac{x(\mu) - x(0)}{\mu}.$$

Az abszolút tömegmérésre alkalmas BORDA illetve GAUSS mérlegelési módszereket (lásd pl. Budó, Kísérleti Fizika, 37§ 2pont), amelyek nem tételezik fel a mérlegkarok egyenlőségét, nem alkalmazzuk, mert ezek csak gyenge minőségű mérlegek, vagy-jó mérlegek esetén-kivételesen nagy pontosság elérésére használatosak. Az általunk használt mérlegekről feltételezzük, hogy elég jók a pontossági igényeinkhez képest.

5. Ábrakészítés

- Minden grafikont milliméterpapíron A/4 méretűre kell elkészíteni, és be kell ragasztani a jegyzőkönyvbe.
- A koordinátatengelyeket egyenléptékű beosztással kell ellátni.
- Az osztásvonalak számozása kerekszámú, nem túl sűrű, nem túl ritka kell hogy legyen. A skálaszámok lehetnek egészek vagy egy-kétjegyű tizedestörtek 10 megfelelő hatványával megszorozva. A hatványszorzót - ha van - a skála végén kell feltüntetni pl. $\times 10^{-3}$ alakban.
- A tengelyek skálázását úgy kell megválasztani, hogy az ábrázolt görbe többé-kevésbé a teljes A/4 -es ábrát töltse ki.
- A koordinátatengelyek alatt illetve mellett fel kell tüntetni az illető fizikai mennyiség megnevezését, betűjelét és mértékegységét.
- A mért értékek diagrambeli helyzetét (azaz a görbe pontjait) kicsi, 2-3 mm kiterjedésű, szabályos $\bigcirc, \times, +, \blacklozenge, \triangle, \blacksquare, \Diamond, \Box$ stb idomokkal tüntetjük fel, amelyek középpontjai az ábrázolni kívánt névleges koordinátaértékekre esnek.
- A valamilyen szempontból összetartozó, ugyanazon fizikai mennyiségekre vonatkozó görbéket ugyanazon a diagramon ábrázolhatjuk. (pl. a Mikola csőben mozgó buborék út-idő görbéit a különböző hajlásszögbeállításokra). Ebben az esetben az azonos paraméterhez tartozó pontokat azonos jellel ábrázoljuk.
- A diagramon a görbepontokat folytonos vonal egészíti ki; ez tükrözi várakozásainkat a görbe alakjára vonatkozóan. (pl. a szabadesésre $s = \frac{g}{2}t^2$ alakban várjuk a mért értékeket). Értelmetlen dolog tehát a folytonos görbét úgy megrajzolni, hogy a mérési pontokat folytonos vonallal összekötjük. Ehelyett a görbéket valamilyen szempont szerint a mérési pontokhoz hozzáigazítva, "fittelve" rajzoljuk meg. Ez a hozzáigazítás leggyakrabban alkalmas matematikai eljárással pl. legkisebb négyzetek módszerével, néha azonban számítások nélkül "csak úgy szemre" történik.
- Célszerű az ábrákon jelzéseket, magyarázó szavakat elhelyezni, az ábra alatt pedig az ábra megnevezését is megadni (pl. "Rugó megnyúlása a terhelés függvényében").



megnyúlás, l (cm)
terhelés, m (g)