

Állóhullám kötélen

Illy Judit, Wiener Csilla, Szommer Péter, Zavaczki Csilla

1. Elméleti háttér

A hullámok alapvető tulajdonságai egyszerűen tanulmányozhatók kötélen kialakult állóhullámok segítségével. A hullámoknak ez a típusa gyakran megfigyelhető mindennapi környezetünkben. Állóhullámok alakulnak ki a zongora vagy a hegedű húrjain is zenélés közben. A megszólaló hang magassága a húrokon kialakult állóhullám frekvenciájától függ.

Ha egy rugalmas kötélen két azonos hullámhosszúságú és amplitúdójú, de ellenkező irányba haladó hullám találkozik, állóhullám alakulhat ki. Ennek feltétele az, hogy a hullámtalálkozás (interferencia) eredményeképpen kialakult eredő hullám hullámhossza λ és a rezgő rugalmas szál hossza (L) össze legyen hangolva. Ezt kísérletileg könnyen megvalósíthatjuk úgy, hogy a kötél egyik végét rögzítjük, a másikat pedig adott frekvenciával rezgetjük, azaz haladó hullámot indítunk el, amely a rögzített végről visszaverődik.

A hullámtalálkozás eredményeképpen a rezgő kötél egyes pontjai maximális amplitúddal rezegnek, mások pedig nyugalomban maradnak. Ezek a csomópontok. Ha mindkét végén rögzített a kötél, akkor az állóhullám kialakulásának feltétele az, hogy a félhullámhossz egész számú többszöröse legyen a kötél hossza.

$$L = \frac{n\lambda_n}{2},$$

ahol n az L hosszúságú kötélen lévő félhullámhosszak száma. Adott hosszúságú kötélen tehát az ábrán látható módon több állóhullám is kialakulhat. Ezeket a rezgő húr sajátrezgéseinek, illetve a sajátrezgésekhez tartozó frekvenciákat sajátfrekvenciáknak nevezzük.

A kialakult hullámhossz nagysága a hullám frekvenciájától és a terjedési sebességétől függ.

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

A hullám frekvenciáját a külső frekvenciaforrás, a terjedési sebességet pedig a szál tulajdonságai határozzák meg.

Rugalmas húron kialakuló transzverzális hullámok terjedési sebessége

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho \cdot A}}$$

ahol F a húrt feszítő erő, ρ a húr anyagának sűrűsége, A pedig a húr keresztmetszete. A szálban kialakult mechanikai feszültség nagysága:

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Mindkét végén rögzített rugalmas szálon kialakult állóhullámok hullámhossza:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

ahol $n = 1, 2, \dots$ (A két véget leszámítva a csomópontok száma: $n-1$)

A húron kialakult állóhullámok lehetséges sajátfrekvenciái a jól ismert

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n}$$

formulából adódnak.

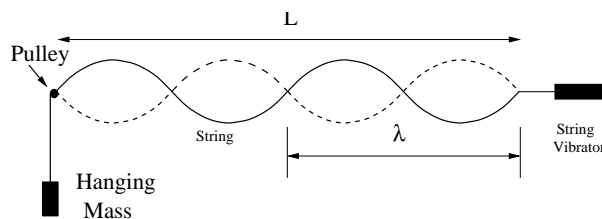
A húr sajátfrekvenciái:

$$f_n = \frac{n}{2L}v = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\rho \cdot A}}$$

A húr tehát annál magasabb hangot ad, minél nagyobb a feszítő erő, és minél rövidebb a húr. Gondoljunk a vonós hangszerek hangfekvésére, a hegedű, brácsa, gordonka méreteire. A precíz hangolás a húrok feszítésével történik.

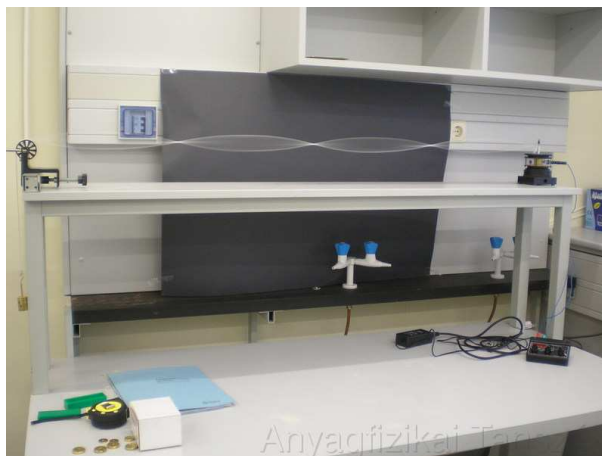
2. A mérés leírása

Kísérleteinkben az állóhullámot egy szinusz hullám generátor által vezérelt vibrátor segítségével állítjuk elő az alábbi rajz szerint (1.ábra).



1.ábra. Állóhullám előállításának sematikus rajza.

A rezgetett szál egyik vége a vibrátorhoz van rögzítve, a másik, csigán átvett végén lógó súly a szálát feszesen tartja. A feszítettség mértéke - kísérletünkben a fonál végén lógó súly hatására a fonalban kialakult mechanikai feszültség nagysága - a hullám terjedési sebességét befolyásolja (2.ábra).



1.ábra. Állóhullám előállítása.

Amint már az elméleti bevezetőben említettük, a megfeszített rugalmas szálon több állóhullám módus is kialakulhat, ha a feszítettség mértékét, a frekvenciát és a rezgő szál hosszát jól összehangoljuk. A szálaban kialakult mechanikai feszültséget- egyben a hullám terjedési sebességét - a fonál végére helyezett súlyok segítségével tudjuk változtatni. A rezgés frekvenciáját és az amplitúdó nagyságát a szinuszhullám generátorral állíthatjuk be (3.ábra). A generátor működési leírása a mérőhelyen található. Használat előtt kérjük alaposan elolvasni!



3.ábra. Szinuszhullám generátor.

Méréseink során a fonál hosszát nem változtatjuk.

Kísérleti összeállítás

1. A mérőhelyen található, asztalhoz rögzített polcon a vibrátor és a csiga egymástól kb 1,5 méter távolságban rögzítve van. Ezen a távolságon a mérés során nem változtatunk. Kössük a mérőhelyen lévő kb 1,5 m hosszúságú vastag, fehér rugalmas szál egyik végét a vibrátorhoz, a másik végére pedig akasszunk a súlyokat, és a csigán átvette lógassuk le. Figyeljünk arra, hogy a kötélek ezek után vízszintes legyenek. Ha nem az, akkor a csiga mozgásával ezt korrigálni lehet.
2. Mérjük meg a fonál hosszát a vibrátorhoz rögzített csomótól a csiga tetejéig. Ez a hossz lesz az L távolság. (Figyelem! A fonál rezgésben lévő hossza nem azonos a fonál teljes hosszával!)
3. A vibrátort két banándugóval ellátott rögzítő segítségével csatlakoztassuk a szinuszhullám generátorhoz (3.ábra). (A generátor használati leírása a mérés helyszínén megtalálható, kérjük alaposan átolvasni!) Kapcsoljuk be a generátort, és az amplitúdó gombot csavarjuk teljesen nullára. (Az óramutató járásával ellenkező irányba.)

Ezzel az összeállítással kétféle mérést fogunk végezni.

Hullámhossz és frekvencia

Állandó feszítő súly mellett a frekvencia változtatásával megkeressük az adott hosszúságú szálaban kialakult állóhullám módusokhoz tartozó diszkrét frekvencia értékeket. Ezeknek ismeretében a hullám terjedési sebessége az alábbi összefüggés szerint meghatározható:

$$v = \lambda_n \cdot f_n.$$

A rezgő kötélen hosszának ismeretében az egyes módusokhoz tartozó hullámhossz értékek mérhetők.

Terjedési sebesség függése az anyagi minőségtől

A hullám terjedési sebessége az alábbi összefüggés szerint függ a kötélen tulajdonságaitól:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho \cdot A}}$$

A kötélen egységnyi hosszának sűrűségét, az un. lineáris sűrűséget μ -vel jelölve:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

A kötelet feszítő erő megegyezik a kötélen végén lógó testre ható nehézségi erővel:

$$F = mg$$

A hullám terjedési sebessége ugyanakkor egyenlő a frekvencia és a hullámhossz szorzatával is:

$$v = f \cdot \lambda$$

Ha adott m esetén úgy állítottuk be a frekvenciát, hogy a kialakult állóhullám esetén n db fél hullámhossz fér rá az L hosszúságú rezgő kötélen, akkor:

$$\lambda = \frac{2}{n}L$$

A két sebesség kifejezést egyenlővé téve a frekvenciára a következő kifejezés adódik:

$$f^2 = \frac{n^2 g}{4L^2 \cdot \mu} m$$

A frekvencia négyzete egyenesen arányos a kötélen végén lógó tömeggel.

$$f^2 = a \cdot m$$

A mért (f^2) – m mennyiségekre illesztett egyenes meredekségéből a μ lineáris sűrűség meghatározható.

$$\mu = \frac{n^2 g}{4L^2 \cdot a}$$

Mérési feladatok

1. Az első mérés során az a feladat, hogy adott súly esetén keressük meg a különböző módusokhoz tartozó un. saját frekvenciákat. A mérési leírás szerint készítsük el a mérőhelyet.

Az első mérésnél a vastagabbik fonalat használjuk. Az egyik végét rögzítsük jó erősen a vibrátorhoz, és a másik, csigán lelógó végére akasszunk 90 g súlyt. Mérés során a vibrátoron található rögzítő lemezt nyissuk ki. Olvassuk el a szinuszos hullámgenerátor

mérőhelyen található használati utasítását, és annak megfelelően állítsuk a készüléket mérő állapotba.

Állítsuk az amplitúdó gombot középállásba, és keressük meg azt a frekvenciát, amin a rezgő kötélen hossza pont egy hullámhossz. ($n = 2$). A frekvencia értékét a két állító gombbal addig kell változtatni, amíg a kötélen két végén és a közepén egy-egy csomópont, a csomópontok között pedig a maximális amplitúdójú rezgésállapot ki nem alakul. Jegyezzük fel, mennyit tudunk változtatni a frekvencia értékén a finomállító gombbal, hogy a rezgés ne változzék. (Mekkora a mérés bizonytalansága).

Ismételjük meg ezt úgy, hogy három félhullámhossz legyen a rezgő kötélen hossza. Most a kötélen mentén két csomópont lesz ($n=3$). Jegyezzük fel az ehhez a módushoz tartozó frekvenciát. Számítsuk ki a két frekvencia arányát. Mit várunk?

Számítsuk ki mindkét esetben a rendelkezésre álló adatok segítségével a hullám terjedési sebességét.

Növeljük tovább a frekvenciát, és állítsuk be a további módusokat, egészen az 5 csomópontot tartalmazó, ($n=6$) állóhullám módusig. Mekkora lesz itt a terjedési sebesség? Mindegyik frekvencia értékét jegyezzük fel. Mutassuk meg, hogy méréseinkkel igazoltuk-e az elméletileg várható frekvencia arányokat!

2. Ennél a mérésnél azt vizsgáljuk, hogy a hullám terjedési sebessége hogyan függ a kötélen anyagi minőségétől.

Cseréljük le az előző méréshez használt vastag fonalat a vékonyabb fehér fonálra, rögzítsük erősen a vibrátorhoz. A másik végére akasszunk 50 g súlyt, és az előbbieken már begyakorolt módon keressük meg az $n = 3$ módushoz tartozó állóhullám frekvenciát. (Három félhullám, két csomópont)

Ismételjük meg ezt a mérést úgy, hogy emeljük meg a kötélen végén lévő súlyokat 20 g-mal egészen 170 g-ig. Végezzünk három párhuzamos mérést. Adatainkat foglaljuk táblázatba, és ennek alapján ábrázoljuk milliméter papíron az $f^2 - m$ összefüggést.

Illesszünk egyenest, és a paraméterek ismeretében számítsuk ki a fonál egységnyi hosszúságának a tömegét!

3. Ellenőrizzük mérésünk helyességét! A mérőhelyen található hosszabb, közel 4 m hosszúságú kötélen tömegét mérjük le analitikai mérlegen, számítsuk ki ebből is μ értékét. Hasonlítsuk össze a két eredményt!