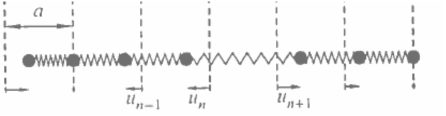
Rugók kényszer rezgései

Groma István

ELTE

February 23, 2019

Lineáris lánc



$$M\ddot{u}_n = D[u_{n+1} - u_n + u_{n-1} - u_n]$$

$$M\ddot{u}_n = -D[2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}]$$

Keressük a megoldást

$$u_n = A_n e^{j\omega t}$$

alakban. Ekkor

$$\omega^2 A_n = \omega_0^2[2A_n - A_{n+1} - A_{n-1}]$$

$$\omega_0^2 = \frac{D}{M}$$

$$\omega^2 \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ . \\ . \\ A_N \end{pmatrix} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & . & . & ? \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & . & . & . & \\ & . & . & . & \\ ? & . & . & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ . \\ . \\ A_N \end{pmatrix}$$

Periodikus határfeltétel

$$u_{N+1} = u_1$$

$$\omega^2 \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ . \\ . \\ A_N \end{pmatrix} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & . & . & -1 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & . & . & . & \\ & . & . & . & \\ -1 & . & . & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ . \\ . \\ A_N \end{pmatrix}$$

Lineáris lánc

$$A_n = A_q e^{jqan}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left[2 - e^{jqa} - e^{-jqa}\right]$$

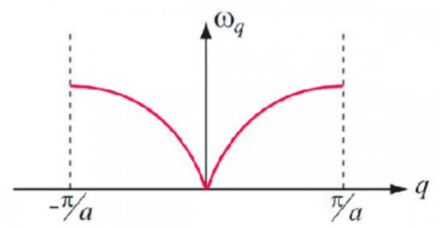
$$\omega^2 = 2\omega_0^2 \left[1 - cos(qa)\right] = 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{qa}{2}\right)$$

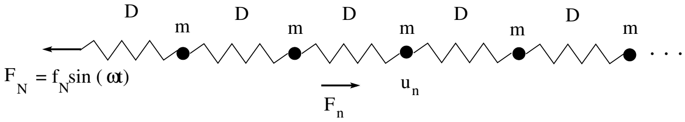
$$\omega = 2\omega_0 \left|\sin\left(\frac{qa}{2}\right)\right|$$

Periodikus határfeltétel miatt

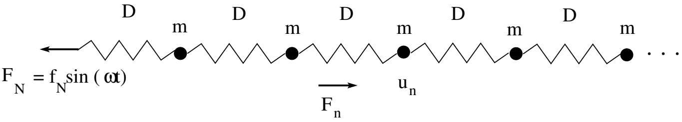
$$1 = e^{jqaN} \quad \longrightarrow \quad q_m = m\frac{2\pi}{Na}$$

Lineáris lánc





$$\begin{aligned} ma_n &= -F_n + F_{n-1} \\ F_{n-1} &= -D(u_n - u_{n-1}) \end{aligned}$$



Mozgásegyenlet

$$
\begin{aligned}
ma_n &= -F_n + F_{n-1} \\
F_{n-1} &= -D(u_n - u_{n-1})
\end{aligned}
$$

Megoldás alakja

$$
\begin{aligned}
F_n &= f_n \exp(j\omega t) \\
u_n &= A_n \exp(j\omega t) \\
a_n &= -\omega^2 A_n \exp(j\omega t)
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
m\omega^2 A_n &= f_n - f_{n-1} \\
f_{n-1} &= -D(A_n - A_{n-1})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m\omega^2 A_n &= f_n - f_{n-1} \\
f_{n-1} &= -D(A_n - A_{n-1})
\end{aligned}
$$

Keressük a megoldást a következő alakban

$$f_n = -DK_nA_n$$

2.

$$\begin{aligned} m\omega^2 A_n &= f_n - f_{n-1} \\ f_{n-1} &= -D(A_n - A_{n-1}) \end{aligned}$$

Keressük a megoldást a következő alakban

$$f_n = -DK_nA_n$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \omega^2 m A_n &= -DK_nA_n + DK_{n-1}A_{n-1} \\ -DK_{n-1}A_{n-1} &= -D(A_n - A_{n-1}) \end{aligned}$$

3.

Bevezetve

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

3.

Bevezetve

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} A_n &= -K_n A_n + K_{n-1} A_{n-1} \\ K_{n-1} A_{n-1} &= (A_n - A_{n-1}) \end{aligned}$$

3.

Bevezetve

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
\frac{\omega^2}{\omega_0^2} A_n &= -K_n A_n + K_{n-1} A_{n-1} \\
K_{n-1} A_{n-1} &= (A_n - A_{n-1})
\end{aligned}$$

0-ra rendezve

$$\begin{aligned}
0 &= -\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + K_n\right) A_n + K_{n-1} A_{n-1} \\
0 &= A_n - (1 + K_{n-1}) A_{n-1}
\end{aligned}$$

4.

Lineáris egyenlet rendszer

$$
\begin{aligned}
y_1 &= aA_n + bA_{n-1} \\
y_2 &= cA_n + dA_{n-1}
\end{aligned}
$$

4.

Lineáris egyenlet rendszer

$$\begin{aligned} y_1 &= aA_n + bA_{n-1} \\ y_2 &= cA_n + dA_{n-1} \end{aligned}$$

Ennek megoldása

$$y_1 d - y_2 b = (ad - bc)A_n$$

4.

Lineáris egyenlet rendszer

$$\begin{aligned} y_1 &= aA_n + bA_{n-1} \\ y_2 &= cA_n + dA_{n-1} \end{aligned}$$

Ennek megoldása

$$y_1 d - y_2 b = (ad - bc)A_n$$

Van nemtriviális megoldás ha

$$\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + K_n\right)(1 + K_{n-1}) - K_{n-1} = 0$$

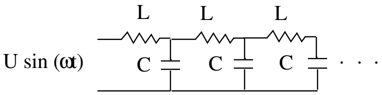
5.

Rekurzív egyenlet K_n-re

$$K_n = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{K_{n-1}}{1 + K_{n-1}}$$

Rekurzív egyenlet K_n-re

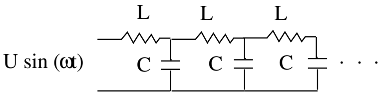
$$K_n = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{K_{n-1}}{1 + K_{n-1}}$$

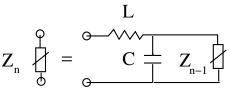


5.

Rekurzív egyenlet K_n-re

$$K_n = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{K_{n-1}}{1 + K_{n-1}}$$



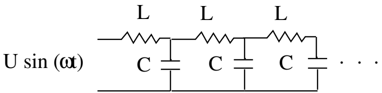


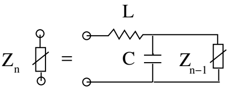
$$Z_n = j\omega L + \frac{\frac{1}{j\omega C} Z_{n-i}}{\frac{1}{j\omega C} + Z_{n-1}}$$

5.

Rekurzív egyenlet K_n-re

$$K_n = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{K_{n-1}}{1 + K_{n-1}}$$





$$Z_n = j\omega L + \frac{\frac{1}{j\omega C} Z_{n-i}}{\frac{1}{j\omega C} + Z_{n-1}}$$

Bevezetve $K_n = j\omega C Z_n$ és $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ jelöléseket visszakapjuk ugyanazt mint a rugóra.

6.

Rekurzív egyenlet K_n-re

$$K_n = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{K_{n-1}}{1 + K_{n-1}}$$

6.

Rekurzív egyenlet K_n-re

$$K_n = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{K_{n-1}}{1 + K_{n-1}}$$

Mi van $n \to \infty$

$$K_\infty = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{K_\infty}{1 + K_\infty}$$

6.

Rekurzív egyenlet K_n-re

$$K_n = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{K_{n-1}}{1 + K_{n-1}}$$

Mi van $n \to \infty$

$$K_\infty = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{K_\infty}{1 + K_\infty}$$

Megoldása

$$K_{\infty_{1,2}} = \frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \pm \sqrt{\frac{\omega^4}{\omega_0^4} - 4\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}{2} \quad \text{ha} \quad \frac{\omega^2}{\omega_0^2} < 4 \quad !!$$

Bevezetve

$$c = 1 - \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2} < 1$$

7.

Bevezetve

$$c = 1 - \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2} < 1$$

K_n -re adódik

$$K_{n+1} = 2(c-1) + \frac{K_n}{1+K_n}$$

7.

Bevezetve

$$c = 1 - \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2} < 1$$

K_n -re adódik

$$K_{n+1} = 2(c-1) + \frac{K_n}{1+K_n}$$

A sorozat fixpontja

$$K_{\infty_{1,2}} = (c-1) \pm \sqrt{c^2-1} \quad \textit{ha} \quad |c| < 1 \quad !!$$

8.

Legyen

$$K_+ = (c-1) + \sqrt{c^2-1}$$

8.

Legyen

$$K_+ = (c-1) + \sqrt{c^2 - 1}$$

Bevezetve

$$y_n = K_n - K_+$$

8.

Legyen

$$K_+ = (c-1) + \sqrt{c^2-1}$$

Bevezetve

$$y_n = K_n - K_+$$

y_n-re kapjuk, hogy

$$y_{n+1} = \frac{\left(c - \sqrt{c^2-1}\right) y_n}{c + \sqrt{c^2-1} + y_n}$$

9.

A kevesebb írás kedvéért jelöljük

$$S = c - \sqrt{c^2 - 1} \quad \textit{ill.} \quad S^* = c + \sqrt{c^2 - 1}$$

9.

A kevesebb írás kedvéért jelöljük

$$S = c - \sqrt{c^2 - 1} \;\; \textit{ill.} \;\; S^* = c + \sqrt{c^2 - 1}$$

Így

$$y_{n+1} = \frac{S y_n}{S^* + y_n}$$

A kevesebb írás kedvéért jelöljük

$$S = c - \sqrt{c^2 - 1} \;\; ill. \;\; S^* = c + \sqrt{c^2 - 1}$$

Így

$$y_{n+1} = \frac{S y_n}{S^* + y_n}$$

További változó csere

$$t_n = \frac{1}{y_n}$$

10.

Kapjuk, hogy

$$t_{n+1} = \frac{1}{S} + \frac{S^*}{S} t_n$$

10.

Kapjuk, hogy

$$t_{n+1} = \frac{1}{S} + \frac{S^*}{S} t_n$$

Végül

$$t_n = l_n + G \quad ha \quad G = -\frac{1}{2\sqrt{c^2 - 1}}$$

10.

Kapjuk, hogy

$$t_{n+1} = \frac{1}{S} + \frac{S^*}{S} t_n$$

Végül

$$t_n = l_n + G \quad ha \quad G = -\frac{1}{2\sqrt{c^2 - 1}}$$

Kapjuk, hogy

$$l_{n+1} = \frac{S^*}{S} l_n$$

11.

Geometriai sor

$$l_n = l_0 \left(\frac{S^*}{S} \right)^n$$

11.

Geometriai sor

$$l_n = l_0 \left(\frac{S^*}{S} \right)^n$$

Visszahelyettesítve

$$K_n = \frac{2\sqrt{c^2 - 1}}{l_0 \left(\frac{S^*}{S} \right)^n - 1} + c - 1 + \sqrt{c^2 - 1}$$

11.

Geometriai sor

$$l_n = l_0 \left(\frac{S^*}{S} \right)^n$$

Visszahelyettesítve

$$K_n = \frac{2\sqrt{c^2-1}}{l_0 \left(\frac{S^*}{S} \right)^n - 1} + c - 1 + \sqrt{c^2-1}$$

Emellett

$$A_n = (K_{n-1} + 1)\, A_{n-1}$$

12.

$$\textit{Ha} \qquad c < -1 \quad \textit{azaz} \quad \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} > 4\right)$$

$$\frac{S^*}{S} = \frac{c - \sqrt{c^2 - 1}}{c + \sqrt{c^2 - 1}} < 1$$

12.

$$Ha \qquad c < -1 \quad azaz \quad \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} > 4\right)$$

$$\frac{S^*}{S} = \frac{c - \sqrt{c^2 - 1}}{c + \sqrt{c^2 - 1}} < 1$$

ekkor

$$K_N = \frac{2\sqrt{c^2 - 1}}{\approx 0 - 1} + c - 1 + \sqrt{c^2 - 1}$$

12.

$$\text{Ha} \qquad c < -1 \quad \text{azaz} \quad \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} > 4\right)$$

$$\frac{S^*}{S} = \frac{c - \sqrt{c^2 - 1}}{c + \sqrt{c^2 - 1}} < 1$$

ekkor

$$K_N = \frac{2\sqrt{c^2 - 1}}{\approx 0 - 1} + c - 1 + \sqrt{c^2 - 1}$$

Így

$$K_N = c - 1 - \sqrt{c^2 - 1}$$

13.

$$\begin{aligned} \textit{Ha} \qquad & -1 < c < 1 \\ & c + \sqrt{c^2 - 1} = \cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0 = S^* \\ & c - \sqrt{c^2 - 1} = \cos\varphi_0 - i\sin\varphi_0 = S \end{aligned}$$

13.

$$Ha \qquad -1 < c < 1$$
$$c + \sqrt{c^2 - 1} = \cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0 = S^*$$
$$c - \sqrt{c^2 - 1} = \cos\varphi_0 - i\sin\varphi_0 = S$$

ekkor

$$\frac{S^*}{S} = \cos(2\varphi_0) + i\sin(2\varphi_0)$$

13.

$$\begin{aligned}
&\textit{Ha} \qquad -1 < c < 1 \\
&c + \sqrt{c^2 - 1} = \cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0 = S^* \\
&c - \sqrt{c^2 - 1} = \cos\varphi_0 - i\sin\varphi_0 = S
\end{aligned}$$

ekkor

$$\frac{S^*}{S} = \cos(2\varphi_0) + i\sin(2\varphi_0)$$

Így

$$\left(\frac{S^*}{S}\right)^n = \cos(2n\varphi_0) + i\sin(2n\varphi_0)$$

14.

$$I_0 = |I_0|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$K_n = \frac{2i\sin\varphi_0}{I_0 e^{i2\varphi_0 n} - 1} + e^{i\varphi_0} - 1$$

14.

$$I_0 = |I_0|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

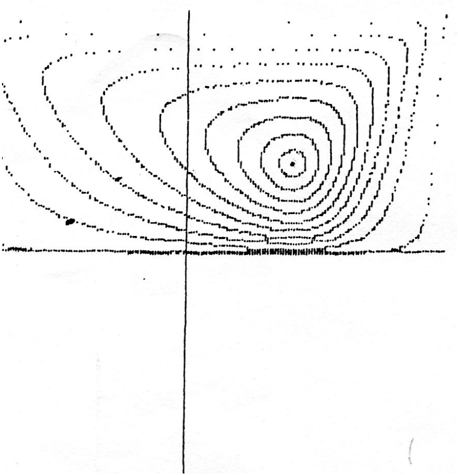
$$K_n = \frac{2i\sin\varphi_0}{I_0 e^{i2\varphi_0 n} - 1} + e^{i\varphi_0} - 1$$

Ha $|I_0| = 1$ akkor (kis számolás után)

$$K_n = \cos\varphi_0 - 1 + \frac{\sin\varphi_0 \sin(n\varphi_0 + \varphi)}{|I_0|\cos(n\varphi_0 + \varphi) - 1}$$

valós

15.



A rezgés amplitúdója

$$
\begin{aligned}
m\omega^2 A_n &= f_n - f_{n-1} \\
f_{n-1} &= -D(A_n - A_{n-1})
\end{aligned}
$$

16.

A rezgés amplitúdója

$$\begin{aligned} m\omega^2 A_n &= f_n - f_{n-1} \\ f_{n-1} &= -D(A_n - A_{n-1}) \end{aligned}$$

Átrendezve

$$\begin{aligned} A_n &= A_{n-1} - f_{n-1} \\ f_n &= \frac{\omega^2}{\omega_0^2} A_{n-1} + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) f_{n-1} \end{aligned}$$

A rezgés amplitúdója

$$
\begin{aligned}
m\omega^2 A_n &= f_n - f_{n-1} \\
f_{n-1} &= -D(A_n - A_{n-1})
\end{aligned}
$$

Átrendezve

$$
\begin{aligned}
A_n &= A_{n-1} - f_{n-1} \\
f_n &= \frac{\omega^2}{\omega_0^2} A_{n-1} + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) f_{n-1}
\end{aligned}
$$

amely

$$
\begin{aligned}
A_n &= A_{n-1} - f_{n-1} \\
f_n &= 2(1-c)A_{n-1} + (2c-1)f_{n-1}
\end{aligned}
$$

mátrix alakban

$$\begin{pmatrix} A_n \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2(1-c) & 2c-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

mátrix alakban

$$\begin{pmatrix} A_n \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2(1-c) & 2c-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

a mátrix sajátértékei

$$\lambda_{1,2} = c \pm \sqrt{c^2-1}, \quad \lambda_1 = S^* \quad \lambda_2 = S$$

17.

mátrix alakban

$$\begin{pmatrix} A_n \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2(1-c) & 2c-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

a mátrix sajátértékei

$$\lambda_{1,2} = c \pm \sqrt{c^2 - 1}, \quad \lambda_1 = S^* \quad \lambda_2 = S$$

ha $c < -1$ akkor

$$\lambda_{1,2} < 0$$

mátrix alakban

$$\begin{pmatrix} A_n \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2(1-c) & 2c-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

a mátrix sajátértékei

$$\lambda_{1,2} = c \pm \sqrt{c^2-1}, \quad \lambda_1 = S^* \quad \lambda_2 = S$$

ha $c < -1$ akkor

$$\lambda_{1,2} < 0$$

ha $-1 < c < 1$ akkor

$$\lambda_{1,2} = e^{\pm i\varphi}$$

18.

Sajátvektorok

$$\vec{e}_1 = \sqrt{1+\frac{1}{(1-S^*)^2}}\begin{pmatrix} \frac{1}{1-S^*} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2 = \sqrt{1+\frac{1}{(1-S)^2}}\begin{pmatrix} \frac{1}{1-S} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ekkor

$$\begin{pmatrix} A_n \\ f_n \end{pmatrix} = a_n\vec{e}_1 + b_n\vec{e}_2$$

Így

$$a_n = (S^*)^n a_0 \qquad b_n = (s)^n b_0$$

19.

Számoljuk ki

$$< K >= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} K_n \quad ha \quad -1 < c < 1$$

Számoljuk ki

$$< K >= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} K_n \quad ha \quad -1 < c < 1$$

Legyen

$$\varphi_0 = \pi \frac{m}{N}$$

ahol N és m relatív prím

19.

Számoljuk ki

$$< K > = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} K_n \quad ha \quad -1 < c < 1$$

Legyen

$$\varphi_0 = \pi\frac{m}{N}$$

ahol N és m relatív prím

Így

$$< K > = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \frac{2i\sin\varphi_0}{l_0\exp\left(2\pi i\frac{nm}{N}\right) - 1} + \exp(i\varphi_0) - 1$$

20.

Átírható

$$< K >= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{2i\sin\varphi_0}{l_0\exp\left(2\pi i\frac{n}{N}\right)-1}+e^{i\varphi_0}-1$$

Átírható

$$< K >= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2i \sin \varphi_0}{l_0 \exp\left(2\pi i \frac{n}{N}\right) - 1} + e^{i\varphi_0} - 1$$

Ha $N \to \infty$ az φ_0/π irracionális

$$< K >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{2i \sin \varphi_0}{l_0 \exp\left(i\varphi\right) - 1} + e^{i\varphi_0} - 1 \right) d\varphi$$

20.

Átírható

$$< K >= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{2i\sin\varphi_0}{l_0\exp\left(2\pi i\frac{n}{N}\right)-1}+e^{i\varphi_0}-1$$

Ha $N\to\infty$ az φ_0/π irracionális

$$< K >= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{2i\sin\varphi_0}{l_0\exp\left(i\varphi\right)-1}+e^{i\varphi_0}-1\right)d\varphi$$

Amely

$$\begin{aligned}< K > &= \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=1}\frac{2i\sin\varphi_0}{(l_0 z-1)z}dz+e^{i\varphi_0}-1\\ &= \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=1}\left\{\frac{2i\sin\varphi_0}{z}+\frac{2i\sin\varphi_0}{z-1/l_0}\right\}dz+e^{i\varphi_0}-1\end{aligned}$$

Ha $|I_0| < 1$

$$< K >= e^{-i\varphi_0} - 1 = c - 1 - \sqrt{c^2 - 1}$$

21.

Ha $|l_0| < 1$

$$< K >= e^{-i\varphi_0} - 1 = c - 1 - \sqrt{c^2 - 1}$$

Ha $|l_0| > 1$

$$< K >= e^{i\varphi_0} - 1 = c - 1 + \sqrt{c^2 - 1}$$