

2. gyakorlat (2025. szeptember 17.) – megoldások

Mechanika, 2025/26 őszi félév, szerda, 10:15-11:45, 0.81

1. **Feladat:** Egy labdát függőlegesen felfelé dobnak. A méterben mért magassága a másodpercben mért idő függvényében:

$$h(t) = 20t - 5t^2.$$

Melyik időpillanatban éri el a labda a maximális magasságot, és mekkora ez a magasság?

Megoldás: A maximális magasságot akkor éri el a labda, amikor $h(t)$ -nek szélsőértéke van, azaz a sebessége nulla. A sebesség a magasság idő szerinti deriváltja:

$$v(t) = \dot{h}(t) = (20t - 5t^2) = 20 - 10t.$$

A maximális magasságnál $v(t_{\max}) = \dot{h}(t_{\max}) = 0$, tehát:

$$20 - 10t_{\max} = 0 \implies 10t_{\max} = 20 \implies t_{\max} = 2 \text{ s.}$$

A maximális magasság:

$$h_{\max} = h(t_{\max}) = h(2) = 20 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2 = 40 - 20 = 20 \text{ m.}$$

Válasz: A labda a maximális, 20 m magasságot 2 másodperc eltelte után éri el.

2. **Feladat:** Egy részecske méterben mért helyzete a másodpercben mért idő függvényében:

$$x(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t - 5.$$

Mely időintervallumokban mozog a részecske az x tengely pozitív irányába?

Megoldás: A részecske az x tengely pozitív irányába akkor mozog, amikor a sebessége pozitív:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2t^3 - 9t^2 + 12t - 5) = 6t^2 - 18t + 12.$$

Az x tengely pozitív irányába mozgás feltétele:

$$v(t) > 0 \implies 6t^2 - 18t + 12 > 0.$$

Osszuk le 6-tal:

$$t^2 - 3t + 2 > 0.$$

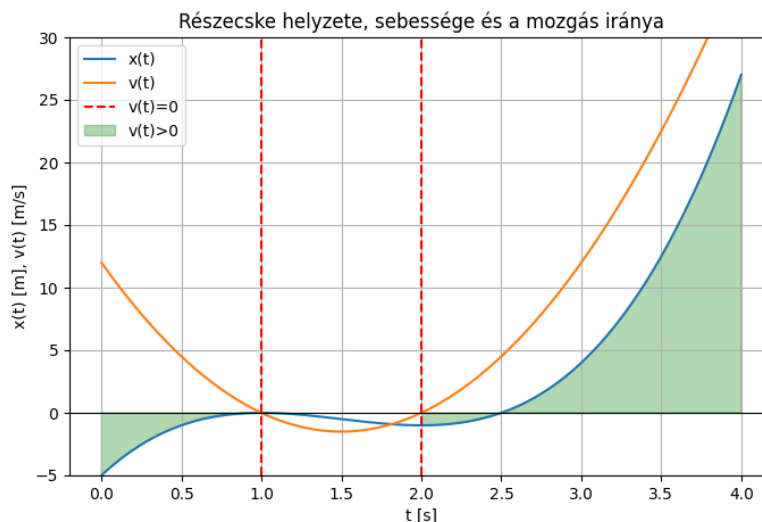
A másodfokú egyenlet gyökei:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \implies t = 1 \text{ vagy } t = 2.$$

A másodfokú egyenlet $t^2 - 3t + 2$ pozitív, ha $t < 1$ vagy $t > 2$.

Válasz: A részecske az x tengely pozitív irányába a következő időintervallumokban mozog:

$$t \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty) \text{ másodperc.}$$



3. **Feladat:** Egy egyenáramú motor nyomatéka a fordulatszámmal arányos:

$$M(\omega) = M_0 \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0} \right),$$

ahol M_0 az indítónyomaték és ω_0 az üresjárat fordulatszám. A motor teljesítménye:

$$P(\omega) = M(\omega) \cdot \omega.$$

Határozd meg azt a fordulatszámot, amelynél a motor teljesítménye maximális.

Megoldás:

A teljesítmény kifejezése:

$$P(\omega) = M_0 \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0} \right) \cdot \omega = M_0 \left(\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0} \right).$$

Ez egy másodfokú függvény ω szerint. A maximum helyét a deriválással keressük:

$$P'(\omega) = M_0 \left(1 - \frac{2\omega}{\omega_0} \right).$$

A maximum feltétele:

$$P'(\omega_{\max}) = 0 \implies 1 - \frac{2\omega_{\max}}{\omega_0} = 0 \implies \omega_{\max} = \frac{\omega_0}{2}.$$

Második derivált:

$$P''(\omega) = -\frac{2M_0}{\omega_0} < 0,$$

tehát valóban maximumról van szó.

Válasz: A motor teljesítménye akkor maximális, ha a fordulatszám az üresjárat fordulatszám felével egyenlő:

$$\omega_{\max} = \frac{1}{2}\omega_0.$$

4. **Feladat:** Egy vonat egyenes sínpályán mozog. Mozgásának hely-idő függvénye (egy alkalmasan választott koordináta rendszerben):

$$x(t) = A e^{2Ct^3} \sin(Bt),$$

ahol $A = 1$ m, $B = \pi/2$ 1/s és $C = 1$ 1/s³.

- Hol van a vonat a $t = 0$, $t = 1$ és $t = 2$ másodpercben?
- Add meg a vonat $v(t)$ és $a(t)$ sebességét ill. gyorsulását tetszőleges t időpontban!
- Add meg a $v(t)$ és az $a(t)$ számszerű értékét a $t = 0$, $t = 1$ és $t = 2$ másodpercben!

Megoldás:

a) Helyfüggvény:

$$x(t) = A e^{2Ct^3} \sin(Bt).$$

Tehát

$$x(0) = A e^0 \sin(0) = 0.$$

Általánosan:

$$x(1) = e^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^2 \cdot 1 = e^2 \text{ m} \approx 7,3891 \text{ m},$$

$$x(2) = e^{16} \sin(\pi) = 0 \text{ m}.$$

b) Sebesség: deriváljuk $x(t)$ -t.

Legyen

$$x(t) = A \cdot f(t) \cdot g(t) \quad \text{az egyszerűség kedvéért, ahol } f(t) = e^{2Ct^3}, \quad g(t) = \sin(Bt).$$

$$\frac{d}{dt}f(t) = 6Ct^2e^{2Ct^3}, \quad \frac{d}{dt}g(t) = B \cos(Bt).$$

A szorzat szabálya szerint

$$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = A \left(6Ct^2e^{2Ct^3} \sin(Bt) + e^{2Ct^3} B \cos(Bt) \right).$$

Rendezve:

$$\boxed{v(t) = A e^{2Ct^3} \left(6Ct^2 \sin(Bt) + B \cos(Bt) \right)}.$$

Gyorsulás: deriváljuk még egyszer $v(t)$ -t. Jelölje

$$W(t) = 6Ct^2 \sin(Bt) + B \cos(Bt).$$

Ekkor $v(t) = A e^{2Ct^3} W(t)$, és

$$\frac{d}{dt}(e^{2Ct^3}) = 6Ct^2 e^{2Ct^3}.$$

Így a szorzat deriválási szabálya alapján:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = A \left(6Ct^2 e^{2Ct^3} \cdot W(t) + e^{2Ct^3} \cdot \dot{W}(t) \right) = A e^{2Ct^3} \left(6Ct^2 W(t) + \dot{W}(t) \right).$$

Számoljuk ki $\dot{W}(t)$:

$$\dot{W}(t) = \frac{d}{dt}(6Ct^2 \sin(Bt)) + \frac{d}{dt}(B \cos(Bt)).$$

$$\frac{d}{dt}(6Ct^2 \sin(Bt)) = 12Ct \sin(Bt) + 6Ct^2 \cdot B \cos(Bt),$$

$$\frac{d}{dt}(B \cos(Bt)) = -B^2 \sin(Bt).$$

Tehát

$$\dot{W}(t) = 12Ct \sin(Bt) + 6CBt^2 \cos(Bt) - B^2 \sin(Bt).$$

Összegezve:

$$\boxed{a(t) = A e^{2Ct^3} \left[36C^2t^4 \sin(Bt) + 12Ct \sin(Bt) + 12CBt^2 \cos(Bt) - B^2 \sin(Bt) \right]}.$$

(Ez a formula tetszőleges t -re megadja a gyorsulást; tetszés szerint lehet rendezni és csoportosítani trigonometrikus tagok szerint.)

c) Most behelyettesítjük: $A = 1 \text{ m}$, $B = \frac{\pi}{2} \text{ s}^{-1}$, $C = 1 \text{ s}^{-3}$. Először a zárt formák:

$$v(t) = e^{2t^3} \left(6t^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right),$$

$$a(t) = e^{2t^3} \left[36t^4 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 12t \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 6\pi t^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{\pi^2}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right].$$

Számértékek:

$t = 0 \text{ s}$:

$$v(0) = e^0 \left(0 + \frac{\pi}{2} \cos(0) \right) = \frac{\pi}{2} \text{ m/s} \approx 1,5708 \text{ m/s},$$

$$a(0) = 0 \text{ m/s}^2.$$

$t = 1 \text{ s}$:

$$v(1) = e^2 \left(6 \cdot 1^2 \cdot 1 + \frac{\pi}{2} \cdot 0 \right) = 6e^2 \text{ m/s} \approx 44,3346 \text{ m/s},$$

$$a(1) = e^2 \left(36 + 12 - \frac{\pi^2}{4} \right) \text{ m/s}^2 \approx e^2 \cdot 45,5326 \text{ m/s}^2 \approx 336,18 \text{ m/s}^2.$$

$t = 2$ s:

$$x(2) = e^{16} \sin(\pi) = 0 \text{ m},$$

$$v(2) = e^{16} \left(6 \cdot 4 \cdot 0 + \frac{\pi}{2} \cos(\pi) \right) = -\frac{\pi}{2} e^{16} \text{ m/s} \approx -1,3958 \times 10^7 \text{ m/s},$$

$$a(2) = e^{16} \left(\underbrace{0}_{\text{sin szorzatok}} - 12\pi \right) \text{ m/s}^2 = -12\pi e^{16} \text{ m/s}^2 \approx -6,699\,97 \times 10^8 \text{ m/s}^2.$$

(Megjegyzés: a nagyon nagy értékek az e^{2t^3} exponenciális növekedésének következményei.)

Végső összegzés (számértékekkel és egységekkel):

$$\begin{array}{lll} x(0) = 0 \text{ m}, & v(0) = \frac{\pi}{2} \text{ m/s} \approx 1,5708 \text{ m/s}, & a(0) = 0 \text{ m/s}^2, \\ x(1) = e^2 \text{ m} \approx 7,3891 \text{ m}, & v(1) = 6e^2 \text{ m/s} \approx 44,3346 \text{ m/s}, & a(1) \approx 336,18 \text{ m/s}^2, \\ x(2) = 0 \text{ m}, & v(2) \approx -1,3958 \times 10^7 \text{ m/s}, & a(2) \approx -6,699\,97 \times 10^8 \text{ m/s}^2. \end{array}$$

5. **Feladat:** Egy exobolygón élő elégedetlen hallgató a papírgalacsinná összegyúrt zárthelyi dolgozatát $v_0 = 10 \text{ m/s}$ sebességgel hajítja el függőlegesen. A galacsin gyorsulása $a = -5 \text{ m/s}^2$. Mennyi lesz $t = 3 \text{ s}$ múlva a dolgozat által megtett

- a) elmozdulás,
- b) megtett út?

Megoldás:

Az egyenes vonalú, állandó gyorsulású mozgás hely-idő összefüggése:

$$h(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2.$$

a) Elmozdulás:

$$h(3) = v_0 \cdot 3 + \frac{1}{2} a \cdot 3^2 = 10 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot (-5) \cdot 9.$$

$$h(3) = 30 - 22.5 = 7,5 \text{ m}.$$

Tehát az elmozdulás $t = 3 \text{ s}$ alatt:

$\Delta h = 7,5 \text{ m}$

b) Megtett út:

A megtett út az *abszolút értékben* vett pályahossz. A test először emelkedik, majd lefelé indul. Meg kell határozni, hogy mikor fordul meg.

A sebesség időfüggvénye:

$$v(t) = v_0 + at = 10 - 5t.$$

A sebesség zérus, ha

$$10 - 5t = 0 \quad \implies \quad t = 2 \text{ s}.$$

Ez az időpillanat a pályacsúcs. Tehát:

- $0 \leq t \leq 2$: a galacsin felfelé halad.
- $2 \leq t \leq 3$: a galacsin lefelé halad.

Megtett út = felfelé megtett út + lefelé megtett út.

Felfelé:

$$\Delta h_{\text{fel}} = h(2) - h(0) = 10 \cdot 2 + \frac{1}{2}(-5) \cdot 2^2 = 20 - 10 = 10 \text{ m.}$$

Lefelé (2 és 3 s között):

$$\delta h_{\text{le}} = h(3) - h(2) = 7,5 - 10 = -2,5 \text{ m.}$$

Ez lefelé irányú elmozdulás, a megtett út ennek abszolút értéke. A teljes megtett út:

$$s = |\Delta h_{\text{fel}} + \Delta h_{\text{le}}| = 10 + 2,5 = 12,5 \text{ m}$$

Végső válasz:

- a) Elmozdulás: 7,5 m,
- b) Megtett út: 12,5 m.