Terjesszük ki a Green-függvényt a komplex félsíkon, hogy megkapjuk a gerjesztéseket! $i\omega_n \to \omega + i\varepsilon$ Hol divergál $G^{(B)}_{1,1}(\mathbf{k}, i\omega_n)$ függvény? Ahol a nevezője 0. Ezek adják meg az elemi gerjesztéseket. Ezeknek a frekvenciái, vagyis ahol $D^{(B)}(\mathbf{k}, i\omega_n)\big|_{\omega=\hbar E_{\mathbf{k}}} = 0$:

$$0 = E^2_{\mathbf{k}} - \hbar^{-2}(e_{\mathbf{k}} + n_0 v(\mathbf{k}))^2 + \hbar^{-2}\, n_0^2 v^2(\mathbf{k})$$

ebből kifejezhető:

$$\hbar E_{\mathbf{k}} = \sqrt{e_{\mathbf{k}}(e_{\mathbf{k}} + 2n_0 v(\mathbf{k}))}$$

mely kicsi $\mathbf{k}$ értékekre: $E_{\mathbf{k}} \approx \hbar\, c \cdot k$, ahol $e_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ összefüggést helyettesítettünk be és $c = \sqrt{\frac{n_0 v(0)}{m}}$ a Bogoljubov hangsebesség.

$D(\mathbf{k}, i\omega_n) = \left(i\omega_n - \hbar^{-1} E_k\right)\left(i\omega_n + \hbar^{-1} E_k\right)$, így $G^{(B)}_{1,1}(\mathbf{k}, i\omega_n)$ parciális törtek alakjában felírva:

$$G^{(B)}_{1,1}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \frac{u_k^2}{i\omega_n - \hbar^{-1} E_{\mathbf{k}}} - \frac{v_k^2}{i\omega_n + \hbar^{-1} E_{\mathbf{k}}}$$

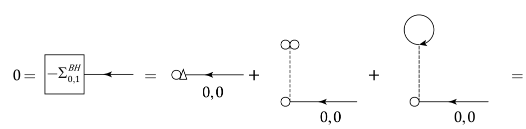
ahol $u_k^2 = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{e_{\mathbf{k}} + n_0 v(\mathbf{k})}{E_{\mathbf{k}}}\right]$ és $v_k^2 = \frac{1}{2}\left[-1 + \frac{e_{\mathbf{k}} + n_0 v(\mathbf{k})}{E_{\mathbf{k}}}\right]$. Az anomális Green-függvény pedig:

$$G^{(B)}_{1,2}(\mathbf{k}, i\omega_n) = -u_k v_k \cdot \left(\frac{1}{i\omega_n - \hbar^{-1} E_{\mathbf{k}}} - \frac{1}{i\omega_n + \hbar^{-1} E_{\mathbf{k}}}\right)$$

Bogoljubov-Hartree közelítés

A közelítés során csak a Hartree tagot vesszük figyelembe. Ez a legegyszerűbb közelítés a Bogoljubov közelítésen túl.

1. kondenzátum részecskeszám (sűrűség) és kémiai potenciál kapcsolata



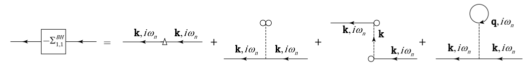
$$= \hbar^{-1}\sqrt{N_0}\left[-\mu + v(0)n_0 + v(0)\,\frac{1}{\beta\hbar}\sum_m \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,(-G_0(\mathbf{q}, i\omega_n))\right] \cdot -G_0(0{,}0)$$

Ekkor $\mu = v(0) \cdot (n_0 + n') = v(0) \cdot n$. Fontos, hogy itt $v(0)$ -at már a teljes részecskeszám-sűrűséggel szorozzuk. A kondenzátumon kívüli részecskeszám sűrűsége:

$$n' = N'/V = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{e^{\beta e_{\mathbf{q}}} - 1} = \frac{1}{(2\pi)^3\lambda^3}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)F\left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

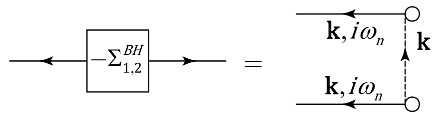
ahol $F(s,\gamma) = \frac{1}{\Gamma(s)} \cdot \int_0^\infty dt\,\frac{t^{s-1}}{e^{t+\gamma} - 1} = Li_s(e^{-\gamma})$, ahol Li_s az ún. polilogaritmikus függvény, $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt$, és $\lambda = \frac{\hbar^2}{2mk_BT}$, valamint $F(s,0) = \zeta(s)$. $n' = n \cdot (T/T_c)^{3/2}$ és $n_0 = n - n' = n\left[1 - (T/T_c)^{3/2}\right]$ és $n = n'(T_c)$, mint ahogy azt már megszokhattuk.

2. sajátenergiák



$$\hbar\,\Sigma_{1,1}(\mathbf{k}, i\omega_n) = (-\mu) + v(0)n_0 + v(\mathbf{k})n_0 + v(0)n'$$

az anomális sajátenergia pedig:



$$\hbar\,\Sigma_{1,2} = v(\mathbf{k}) \cdot n_0$$

Vegyük észre, hogy $\hbar\,\Sigma_{1,1}(\mathbf{k}, i\omega_n)$ 1, 2. és 4. tagjának összege 0, így

$$\hbar\,\Sigma_{1,1}(\mathbf{k}, i\omega_n) = v(\mathbf{k}) \cdot n_0$$

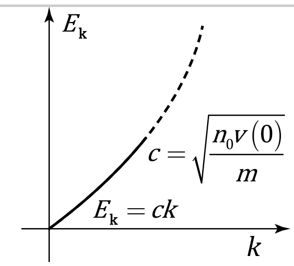
3. A Green-függvények

$$G^{(B-H)}_{1,1}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \frac{u_k^2}{i\omega_n - \hbar^{-1} E_{\mathbf{k}}} - \frac{v_k^2}{i\omega_n + \hbar^{-1} E_{\mathbf{k}}}$$

és

$$G^{(B-H)}_{1,2}(\mathbf{k}, i\omega_n) = -u_k v_k \cdot \left(\frac{1}{i\omega_n - \hbar^{-1} E_{\mathbf{k}}} - \frac{1}{i\omega_n + \hbar^{-1} E_{\mathbf{k}}} \right)$$

ahol $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{e_{\mathbf{k}}(e_{\mathbf{k}} + 2n_0 v(\mathbf{k}))}$, valamint $u_k^2 = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{e_{\mathbf{k}} + n_0 v(\mathbf{k})}{E_{\mathbf{k}}}\right]$ és $v_k^2 = \frac{1}{2}\left[-1 + \frac{e_{\mathbf{k}} + n_0 v(\mathbf{k})}{E_{\mathbf{k}}}\right]$. Vagyis láthatjuk, hogy formálisan ugyanazt kapjuk, mint a Bogoljubov közelítésnél. A különbség az, hogy $n_0(T) = n\left(1 - (T/T_c)^{3/2}\right)$ hőmérséklet-függő. Ez akkor a Bogoljubov közelítés, ha $T = 0$. Ebben a közelítésben $c \to 0$ ha $T \to T_c$.



Diszperziós reláció a Bogoljubov-Hartree közelítésben

Kondenzátumon kívüli atomok száma

A teljes propagátorból számolva $n' = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} n'(k)$, melyben

$$n'(k) = \frac{-1}{\beta\hbar} \sum_m e^{i\nu_m \eta} \cdot G_{1,1}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \frac{-1}{\beta\hbar} \sum_m e^{i\nu_m \eta} \cdot \left[\frac{u_k^2}{i\omega_n - \hbar^{-1} E_{\mathbf{k}}} - \frac{v_k^2}{i\omega_n + \hbar^{-1} E_{\mathbf{k}}} \right]$$

Végezzük el a frekvencia szerinti integrálást!

$$n'(k) = \frac{u_k^2}{e^{\beta E_{\mathbf{k}}} - 1} - \frac{v_k^2}{e^{-\beta E_{\mathbf{k}}} - 1} = \frac{u_k^2 + e^{\beta E_{\mathbf{k}}} \cdot v_k^2}{e^{\beta E_{\mathbf{k}}} - 1} = v_k^2 + \left(u_k^2 + v_k^2\right) \cdot \frac{1}{e^{\beta E_k} - 1}$$

Ezt visszaírva n' -be, az már csak az integrálást kell elvégezni. Ez nem mindig tehető meg analitikusan, csak speciális esetekben. Pl

a. $T = 0$ esetén (Bogo. közelítés): $n'(k) = v_k^2 \Rightarrow n'|_{T=0} = \frac{8}{3} n_0 \left(\frac{n_0 a^3}{\pi}\right)^{1/2}$

b. $T = T_c$ esetén (szabad, nem kondenzált gáz):

$$\left.\begin{aligned} E_{\mathbf{k}} &= e_{\mathbf{k}} \\ v_k^2 &= 0 \\ u_k^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow n'(k) = n(k)$$

c. $T \to 0$, de $T \neq 0$ esetén: $n'|_T - n'|_{T=0} = \frac{1}{12} \frac{m}{c\hbar^3} (k_B T)^2$, ahol c a Bogoljubov hangsebesség, $c^2 = nv(0)/m$

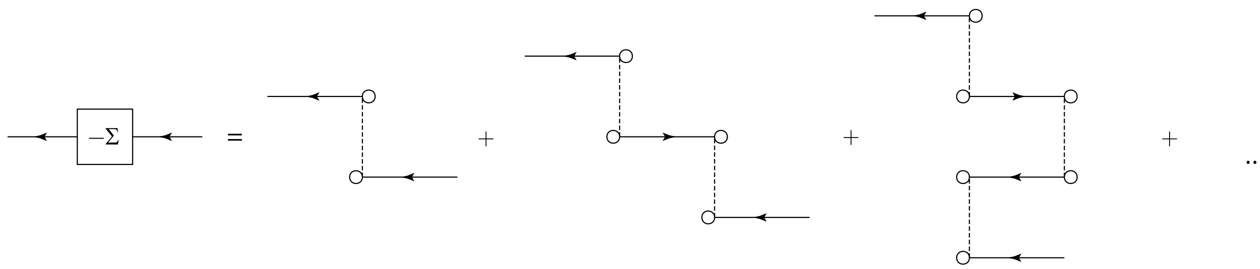
Érdekesség

Bogoljubov közelítésben nézzük meg, hogy a

$$G^{(B)}_{1,1}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \frac{i\omega_n + \hbar^{-1}(e_{\mathbf{k}} + n_0 \cdot v(\mathbf{k}))}{\left[i\omega_n - \hbar^{-1}(e_{\mathbf{k}} + n_0 v(\mathbf{k}))\right] \cdot \left[i\omega_n + \hbar^{-1}(e_{\mathbf{k}} + n_0 v(\mathbf{k}))\right] + \hbar^{-2}\, n_0^2 v(\mathbf{k})^2}$$

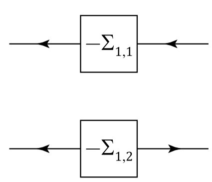
Green-függvény felírható-e $G^{B}_{1,1}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - \hbar^{-1} e_{\mathbf{k}} - \Sigma^*(\mathbf{k}, i\omega_n)}$ alakban, azaz létezik-e ilyen Σ^* ? A válasz az, hogy igen, és mégpedig:

$$\Sigma^*(\mathbf{k}, i\omega_n) = \frac{\hbar^{-1}\, n_0 v(\mathbf{k})}{1 - \dfrac{\hbar^{-1}\, n_0 \cdot v(\mathbf{k})}{-i\omega_n - \hbar^{-1}\, e_{\mathbf{k}}}}$$

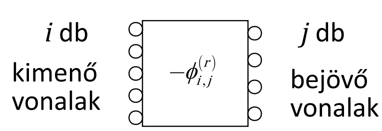


Hugenholtz-Pines tétel

$\Sigma_{1,1}(0,0) - \Sigma_{1,2}(0,0) = 0$ igaz a perturbációszámítás minden rendjében. Láthatjuk néha $\Sigma_{1,1}(0,0) - \Sigma_{1,2}(0,0) = \mu$ alakban is, de mi a kémiai potenciált a normális sajátenergia részeként kezeljük. A bizonyításhoz tekintsük az ábrákat! A normális sajátenergia diagramja 1 ki- és 1 bejövő, az anomális sajátenergia diagramja pedig 2 kimenő élt tartalmaz:



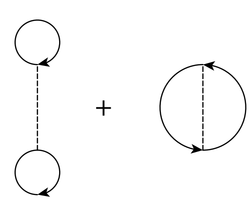
Most pedig tekintsünk egy r-ed rendű diagramot, mely nem csatlakozik külső pontohoz, mert az éleket karikákra cseréltük:

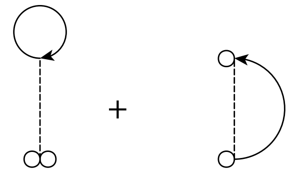


$$\Sigma^{(r)}_{1,1}(0,0) = \frac{1}{N_0} \sum_{i,j} i \cdot j \cdot \phi^{(r)}_{i,j}$$

Mik lehetnek ezek a $\phi^{(r)}_{i,j}$ diagramok? Nézzünk 2 példát!

$\phi^{(1)}_{0,0} =$

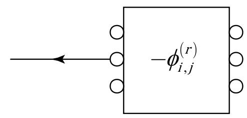


$\phi^{(1)}_{1,1} =$ 

$$\Sigma^{(r)}_{1,1}(0,0) - \Sigma^{(r)}_{1,2}(0,0) = \frac{1}{N_0}\sum_{i,j}(i \cdot j - i(i-1))\phi^{(r)}_{i,j} = \frac{1}{N_0}\sum_{i}\left(i^2 - i^2 + i\right)\phi^{(r)}_{i,j} = \frac{1}{N_0}\sum_{i} i\phi^{(r)}_{i,i} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N_0}}\frac{1}{\sqrt{N_0}}\sum_{i} i\phi^{(r)}_{1,1} = \frac{1}{\sqrt{N_0}}\Sigma^{(r)}_{1,0}(0,0) = 0$$

Az egyenlőség második sorában a bal oldalt az alábbi diagram ábrázolja:



$= -\Sigma^{(r)}_{1,0}(0,0)$

Gap nélküli gerjesztés: $E_{\mathbf{k}\to 0} \to 0$, azaz $E_{\mathbf{k}}$ a 0-ból indul $\Rightarrow D(0,0) = 0$. Behelyettesítve $D(\mathbf{k}, i\omega_n) = \left[i\omega_n - \hbar^{-1}(e_{\mathbf{k}} + n_0 v(\mathbf{k}))\right]\left[i\omega_n + \hbar^{-1}(e_{\mathbf{k}} + n_0 v(\mathbf{k}))\right] + \left(\hbar^{-1}\, n_0 v(\mathbf{k})\right)^2$ egyenletbe,

$$D(0,0) = -\Sigma_{1,1}(0,0)\Sigma_{2,2}(0,0) + \Sigma_{1,2}(0,0)\Sigma_{2,2}(0,0) = -\Sigma^2_{1,1}(0,0) + \Sigma^2_{1,2}(0,0) =$$

$$= -\left[\Sigma_{1,1}(0,0) - \Sigma_{1,2}(0,0)\right] \cdot \left[\Sigma_{1,1}(0,0) + \Sigma_{1,2}(0,0)\right]$$

ahol felhasználtuk, hogy $\Sigma_{1,1}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \Sigma_{2,2}(-\mathbf{k}, -i\omega_n)$, illetve $\Sigma_{1,2}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \Sigma_{2,1}(-\mathbf{k}, i\omega_n)$.