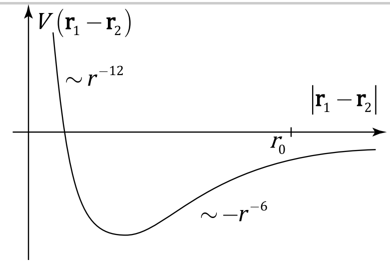
Kétrészecske kölcsönhatás vákuumban



Kétrészecske potenciál általános alakja
Lennard-Jones-potenciál közelítésben r_0 hatótávval

Két részecskénk van csak egyelőre, 2 bozon vagy fermion. A Hamilton-operátor:

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + v(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

Ekkor a Schrödinger egyenlet

$$H\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = E\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$$

Bevezethetünk új térkoordinátákat, a tömegközéppontit és a relítvat:

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

És új impulzusokat:

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}{2}$$

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2}{2}$$

Ekkor ψ térfüggése felírható szorzatalakban:

$$\psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) \cdot e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}$$

A Hamilton operátor az új koordinátákkal, bevezetve az össztömeg $M = m + m$ és redukált tömeg $\mu = \frac{m+m}{m \cdot m}$ kifejezéseit (különböző tömegű részecskék esetén m-ek értelemszerű indexelésével):

$$H = \frac{P^2}{2M} + \frac{p^2}{2\mu} + v(\mathbf{r})$$

Így a Schrödinger-egyenlet:

$$\left[\frac{-\hbar^2 \Delta_{\mathbf{r}}}{2M} + \frac{\hbar^2 K^2}{2M} + v(\mathbf{r})\right]\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$

Ekkor bevezetve a $k^2 = \frac{m}{\hbar^2} E - \frac{K^2}{4}$ és $V(\mathbf{r}) = \frac{m}{\hbar^2} v(\mathbf{r})$ mennyiségeket, a Schrödinger egyenlet a következő alakban írható:

$$\left(\Delta_{\mathbf{r}} + k^2\right)\psi(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})$$

Definiáljuk a Schrödinger egyenlet Green-függvényét:

$$\left(\Delta_{\mathbf{r}} + k^2\right) G_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

A Schrödinger egyenlet megoldásai:

- Kölcsönhatás-mentes esetben, azaz ha $V = 0$, az egyik megoldás:
$$\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$$
- kölcsönható (általános) esetben az egyik megoldás:
$$\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}) = \lambda \cdot e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - \int G_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')V(\mathbf{r}')\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}')d^3 r'$$

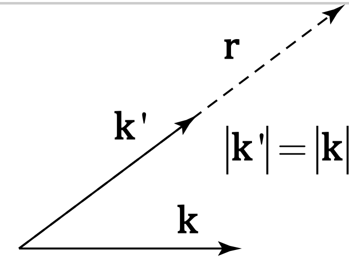
  Ennek megoldását már más tárgyakból is tanultuk:

$$G_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{q^2-k^2-i\eta} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

Ha $r \gg r_0$, $G_{\mathbf{k}}^{(+)}$ sorbafejthető, mert

$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = r|\mathbf{e}_{\mathbf{r}} - \mathbf{r}'/r| \approx r - \mathbf{r}\,\mathbf{r}'/r + O(r_0/r)$, így :

$G_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} e^{-\frac{ik\mathbf{r}\,\mathbf{r}'}{r}}$.



A hullámszámvektor
és hely koordináta

Ekkor a megoldás:

$$\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}) \sim e^{i\mathbf{k}\,\mathbf{r}} - \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'} \cdot V(\mathbf{r}')\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}')d^3r'$$

Definiálhatjuk a szórási amplitúdót:

$$f^{(+)}(\mathbf{k},\mathbf{k}') := -\frac{1}{4\pi} \int e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'} V(\mathbf{r}')\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}')d^3r'$$

Megjegyzés: ott, ahol $V(\mathbf{r})$ divergál, ott $\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r})$ eltűnik, viszont $f^{(+)}(\mathbf{k},\mathbf{k}')$ véges marad. Perturbatív kezelés nem lehetséges, mert véges rendben nem lehet levinni ψ -t 0-ba.

Fourier-transzformáljuk a potenciált és a hulláfüggvényt:

$$V(\mathbf{q}) = \int e^{-i\mathbf{q}\,\mathbf{r}} \cdot V(\mathbf{r})d^3r$$

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = \int e^{-i\mathbf{q}\,\mathbf{r}}\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}) = (2\pi)^3\delta(\mathbf{q}-\mathbf{k}) - \frac{1}{q^2-k^2-i\eta} \int V(\mathbf{p})\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) \frac{d^3p}{(2\pi)^3}$$

Ekkor a szórási amplitúdók kifejezhetőek ezekkel a mennyiségekkel:

$$\widetilde{f^{(+)}}(\mathbf{k},\mathbf{k}') := -4\pi f^{(+)}(\mathbf{k},\mathbf{k}') = \int V(\mathbf{p})\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}'-\mathbf{p}) \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \int V(\mathbf{k}'-\mathbf{p})\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) \frac{d^3P}{(2\pi)^3}$$

$$\widetilde{f^{(+)}}(\mathbf{k},\mathbf{k}') = V(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \int \frac{V(\mathbf{k}'-\mathbf{p})\widetilde{f^{(+)}}(\mathbf{k},\mathbf{p})}{k^2-p^2+i\eta} \frac{d^3p}{(2\pi)^3}$$

(2)

Megjegyzés:

- $f(\mathbf{k},\mathbf{k}')$ -t megkapjuk nem csak a tömeghéjon
- erős taszító potenciálban megoldva minden rend divergens
- Born-közelítés: $\widetilde{f^{(+)}}(\mathbf{k},\mathbf{k}') = V(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$
- Parciális hullámok módszere:

$$f(\mathbf{k},\mathbf{k}') = -\frac{1}{4\pi}\widetilde{f}(\mathbf{k},\mathbf{k}') = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{k} \sin(\delta_l)P_l(\cos\vartheta)$$

  $\delta_0 = -ka$ (s-hullámú szórási hossz), $\delta_l = |ka|^{2l+1}$ Ga $|k \cdot a| \ll 1$, akkor elég csak az s-hullámot figyelembe venni: $\Rightarrow f(\mathbf{k},\mathbf{k}') = -a(1+O(k \cdot a))$, így

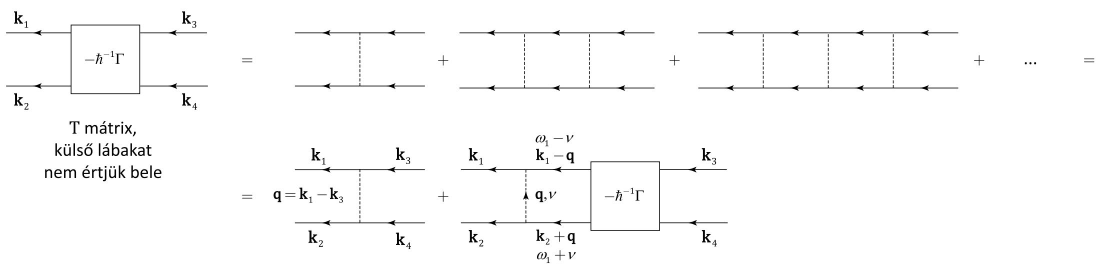
$$\widetilde{f} = 4\pi a \Rightarrow V(k) = 4\pi a \Rightarrow v(k) = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$$

- Merev gömbű, r_0 sugarú potenciálra a szórási hossz, ha csak az s hullámú szórási hossz vesszük figyelembe, épp $2 \cdot r_0$

Kétrészecske szórás közegben

Definiáljuk a négypontfüggvényt, vagy más néven T-mátrixot:

$\Gamma(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4) = v(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3) - \int \frac{1}{\beta\hbar^2}\sum_m v(\mathbf{q}) G_{(0)}(\mathbf{k}_1-\mathbf{q}) G_{(0)}(\mathbf{k}_2+\mathbf{q}) \Gamma(\mathbf{k}_1-\mathbf{q},\mathbf{k}_2+\mathbf{q},\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4) \frac{d^3q}{(2\pi)^3}$ A T-mátrix diagramja:



Állítás: Γ nem függ az átadott frekvenciától. Ezért a Matsubara-frekvenciákra való összegzés elvégezhető.

$$\frac{1}{\beta\hbar^2}\sum_m G_{(0)}(\mathbf{k}_1-\mathbf{q})G_{(0)}(\mathbf{k}_2+\mathbf{q}) = \frac{1}{\beta\hbar^2}\sum_m \frac{1}{i\omega_1 - i\nu_m - \hbar^{-1}\left(e_{\mathbf{k}_1-\mathbf{q}}-\mu\right)} \cdot \frac{1}{i\omega_2 + i\omega_m - \hbar^{-1}\left(e_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}-\mu\right)} =$$

$$= \frac{1}{\beta\hbar^2}\sum_m \frac{1}{i\omega_1 + i\omega_2 - \hbar^{-1}\left(e_{\mathbf{k}_1-\mathbf{q}} + e_{\mathbf{k}_2+\mathbf{q}} - 2\mu\right)}\left[\frac{1}{i\omega_1 - i\nu_m - \hbar^{-1}\left(e_{\mathbf{k}_1-\mathbf{q}}-\mu\right)} + \frac{1}{i\omega_2 + i\nu_m - \hbar^{-1}\left(e_{\mathbf{k}_2+\mathbf{q}}-\mu\right)}\right] =$$

$$= -\frac{1}{\hbar}\frac{1 + n^{(0)}(\mathbf{k}_1-\mathbf{q}) + n^{(0)}(\mathbf{k}_2+\mathbf{q})}{i\omega_{n_1} + i\omega_{n_2} - \hbar^{-1}\left(e_{\mathbf{k}_1-\mathbf{q}} + e_{\mathbf{k}_2+\mathbf{q}} - 2\mu\right)}$$

ahol $n^{(0)}(\mathbf{k}) = \frac{1}{e^{\beta\left(e_{\mathbf{k}}-\mu\right)}-1}$.

Tömegközéppponti és relatív koordinátákkal:

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4$$

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}{2}$$

$$\mathbf{k}' = \frac{\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4}{2}$$

Ekkor

$$i\omega_N = i\omega_{n_1} + i\omega_{n_2} = i\omega_{n_3} + i\omega_{n_4}$$

$$z - 2\left(e_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \mu\right) := \hbar\left(i\omega_{n_1} + i\omega_{n_2} - \hbar^{-1}\left(e_{\mathbf{k}_1-\mathbf{q}} + e_{\mathbf{k}_2+\mathbf{q}} - 2\mu\right)\right) = i\hbar\omega_N - \frac{\hbar^2K^2}{4m}$$

illetve

$$\Gamma(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4) \to \Gamma(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{K},z)$$

Ekkor az jön ki, hogy

$$\Gamma(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{K},z) = v(\mathbf{k}-\mathbf{k}') + \int v(\mathbf{q})\frac{F_{(+)}(\mathbf{K},\mathbf{k}-\mathbf{q})}{z - 2\left(e_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}-\mu\right)}\Gamma(\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}',\mathbf{K},z)\frac{d^3q}{(2\pi)^3}$$

(3) melyben

$$F_{(+)}(\mathbf{K}, \mathbf{k}-\mathbf{q}) = 1 + n^{(0)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}) + n^{(0)}(\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}) = 1 + n^{(0)}(\mathbf{K}/2 + \mathbf{k} - \mathbf{q}) + n^{(0)}(\mathbf{K}/2 - \mathbf{k} + \mathbf{q})$$