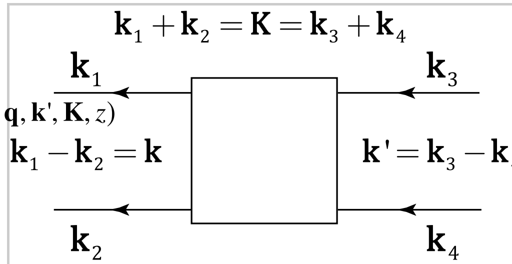
A T-mátrix és a szórási amplitúdó kapcsolata

Vezessünk be egy hullámfüggvényt a közegbeli szórásra, $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})$ -val analóg mennyiséget a közegre, ez legyen

$$\Gamma(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{K},z) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} v(\mathbf{q})\chi(\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}',\mathbf{K},z)$$

$$\chi(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{K},z) = (2\pi)^3\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') + \frac{F_{(+)}(\mathbf{K},\mathbf{k})}{z-2(e_{\mathbf{k}}-\mu)} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} v(\mathbf{q})\chi(\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}',\mathbf{K},z)$$

1. $T=0$ esete, ekkor $F_{(+)}(\mathbf{K},\mathbf{k}) = 1$ .Ekkor χ az alábbi egyenletnek tesz eleget:



$T=0$ esetén a diagram

$$\chi_0(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{K},z) = (2\pi)^3\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') + \frac{1}{z-2(e_{\mathbf{k}}-\mu)} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} v(\mathbf{q})\chi_0(\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}',\mathbf{K},z) \quad (4)$$

$$\Gamma_0(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{K},z) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} v(\mathbf{q})\chi(\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}',\mathbf{K},z)$$

Az (5)-ös egyenletből:

$$z-2(e_{\mathbf{k}}-\mu)\chi_0(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{K},z) - \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} v(\mathbf{q})\chi_0(\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}',\mathbf{K},z) = (2\pi)^3[z-2(e_{\mathbf{k}}-\mu)]\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1) \quad (5a)$$

$$\left(2e_{\mathbf{k}_1}-2e_{\mathbf{k}}+i\eta\right)\psi_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{k}) - \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} v(\mathbf{q})\psi_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{k}-\mathbf{q}) = (2\pi)^3\left[2e_{\mathbf{k}_1}-2e_{\mathbf{k}}+i\eta\right]\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$$

ez abból jött, hogy még előző órán

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = (2\pi)^3\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}) - \frac{1}{q^2-k^2-i\eta} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p})\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}-\mathbf{p})$$

Ha most $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_1$, akkor $\psi^*_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{k})$ -vel szorozva (5a)-t, majd $\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$ -val kiintegrálva kapjuk az (5b) egyenletet:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}[z-2(e_{\mathbf{k}}-\mu)]\chi_0(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{K},z)\psi^*_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{k}) - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} v(\mathbf{q})\chi_0(\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}',\mathbf{K},z)\psi^*_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{k}) =$$

$$= [z-2(e_{\mathbf{k}'}-\mu)]\psi^*_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{k}') \quad (5b)$$

A bal oldal második tagjában térjünk át $\mathbf{k}'' = \mathbf{k}-\mathbf{q}$ szerinti integrálásra, ekkor

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} v(\mathbf{q})\chi_0(\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}',\mathbf{K},z)\psi^*_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{k}) = -\int \frac{d^3k''}{(2\pi)^3}\chi_0(\mathbf{k}'',\mathbf{k}',\mathbf{K},z)\cdot \underbrace{\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} v(\mathbf{q})\psi^*_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{k}''+\mathbf{q})}_{\left[2e_{\mathbf{k}_1}-2e_{\mathbf{k}''}-i\eta\right]\psi^*_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{k}'')}$$

ahol a kapcsos kifejezéshez elvégeztünk egy $\mathbf{q} \to -\mathbf{q}$ trafót. Mivel v szimmetrikus, így az marad maga. Ekkor az (5b) egyenlet:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[z-2\left(e_{\mathbf{k}_1}-\mu\right)+i\eta\right]\chi_0(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{K},z)\psi^*_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{k}) = [z-2(e_{\mathbf{k}'}-\mu)]\psi^*_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{k}')$$

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\chi_0(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{K},z)\psi^*_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{k}) = (z-2e_{\mathbf{k}'}+2\mu)\frac{\psi^*_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{k}')}{z-2e_{\mathbf{k}_1}+2\mu}$$

ahol $\eta \to 0$ határátmenetet elvégeztük, azaz $\eta = 0$ -t behelyettesítettünk (z úgyis tartalmaz még egy képzetes részt a Matsubara-frekvencia miatt). Használjuk fel a

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\, \psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}_1)\psi^*_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}_2) = (2\pi)^3 \cdot \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$$

összefüggést, azaz integráljuk mindkét oldalt $\int \psi_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{k}") \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3}$ szerint:

$$\chi_0(\mathbf{k}", \mathbf{k}', \mathbf{K}, z) = (z - 2e_{\mathbf{k}'} + 2\mu) \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{\psi^*_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{k}')\psi_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{k})}{z - 2e_{\mathbf{k}_1} + 2\mu}$$

Ne felejtsük, hogy $\psi^*_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{k}') = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_1) + \frac{\widetilde{f}^*(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}')}{2e_{\mathbf{k}_1} - 2e_{\mathbf{k}'} - i\eta}$ ezt beírva és elvégezve az integrálást, majd parciális törtekre való bontást:

$$\chi_0(\mathbf{k}", \mathbf{k}', \mathbf{K}, z) = \psi_{\mathbf{k}'}(\mathbf{k}") + \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{2e_{\mathbf{k}_1} - 2e_{\mathbf{k}'} - i\eta} + \frac{1}{z - 2e_{\mathbf{k}} + 2\mu}\right] \psi_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{k}") \cdot \widetilde{f}^*(\mathbf{k}_1, \mathbf{k})$$

Mindkét oldalt $\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} v(\mathbf{k} - \mathbf{k}")$ szerint integrálva:

$$\Gamma_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{K}, z) = \widetilde{f}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') + \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{2e_{\mathbf{q}} - 2e_{\mathbf{k}'} - i\eta} + \frac{1}{z - 2e_{\mathbf{q}} + 2\mu}\right] \widetilde{f}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \cdot \widetilde{f}^*(\mathbf{k}', \mathbf{q})$$

2. $T > 0$ esetén a (4)-es egyenlet mindkét oldaláról levonunk $\frac{\Gamma(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{K}, z)}{z - 2e_{\mathbf{k}} + 2\mu}$-t, majd beírjuk Γ definícióját:

$$\chi(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{K}, z) - \frac{1}{z - 2e_k + 2\mu} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} v(\mathbf{q}) \chi(\mathbf{k} - \mathbf{q}, \mathbf{k}', \mathbf{K}, z) =$$

$$= (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') + \frac{F_{(+)}(\mathbf{K}, \mathbf{k}) - 1}{z - 2(e_{\mathbf{k}} - \mu)} \Gamma(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{K}, z)$$

ekkor χ -t felírva, mint

$$\chi(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{K}, z) = \int \frac{d^3q}{2\pi^3} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \cdot \chi(\mathbf{q}, \mathbf{k}', \mathbf{K}, z)$$

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left[(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') - \frac{v(\mathbf{k} - \mathbf{q})}{z - 2e_{\mathbf{k}} + 2\mu}\right] \chi(\mathbf{q}, \mathbf{k}', \mathbf{K}, z) =$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) - \frac{v(\mathbf{k} - \mathbf{q})}{z - 2e_{\mathbf{k}} + 2\mu}\right] \chi_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}", \mathbf{K}, z) =$$

$$= (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q} - \mathbf{k}")$$

Integrálva mindkét oldalt $\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \chi_0(\mathbf{k}", \mathbf{k}, \mathbf{K}, z)$ szerint:

$$\chi(\mathbf{k}", \mathbf{k}', \mathbf{K}, z) = \chi_0(\mathbf{k}", \mathbf{k}', \mathbf{K}, z) + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \chi_0(\mathbf{k}", \mathbf{k}, \mathbf{K}, z) \frac{F_{(+)}(\mathbf{K}, \mathbf{k}) - 1}{z - 2(e_{\mathbf{k}} - \mu)} \Gamma(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{K}, z)$$

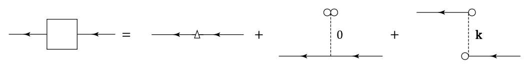
Most integrálva $\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} v(\mathbf{k} - \mathbf{k}")$ szerint:

$$\Gamma(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{K}, z) = \Gamma_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{K}, z) + \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \Gamma_0(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{K}, z) \frac{F_{(+)}(\mathbf{K}, \mathbf{k}) - 1}{z - 2(e_{\mathbf{q}} - \mu)} \Gamma(\mathbf{q}, \mathbf{k}', \mathbf{K}, z)$$

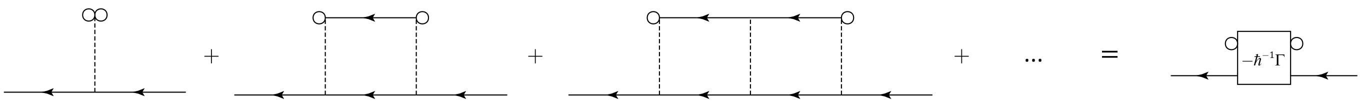
Alacsony energiás szórásnál, azaz ha $|\mathbf{k}a| \ll 1$:

$$\widetilde{f}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \approx \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} [1 + O(|\mathbf{k}a|)] \Rightarrow \Gamma_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{K}, z) \approx \Gamma_0(0,0,0,0) = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \Rightarrow \Gamma(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{K}, z) \approx \Gamma(0,0,0,0) = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$$

$v(\mathbf{k}) \leftarrow \Gamma(0,0,0,0) = 4\pi\hbar^2 a/m$, $v(\mathbf{r}) = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \delta(\mathbf{r})$



Az utolsó tagját a diagramnak lecseréljük a következőre:



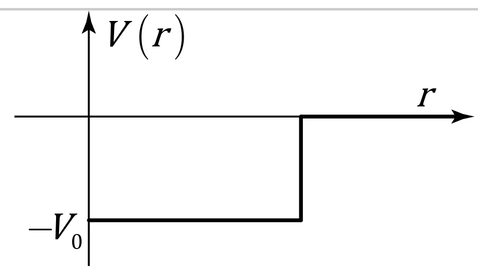
Azt szoktuk mondani, hogy $a > 0$ esetén egy kölcsönhatás taszító, $a < 0$ esetén viszont vonzó. Ez a hétköznapi képünknek nem teljesen fog megfelelni. Ennek árnyalásához tekintsük a következőket.

Alakrezonancia

A Schrödinger egyenlet ekkor:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2\chi(r)}{dr^2} + V(r)\chi(r) = E \cdot \chi(r)$$

ahol $\chi(r) = r \cdot R(r)$ alakú. Szeretnénk majd az alacsony energiás szórásokat tekinteni. De előtte: vegyük az $E < 0$ esetet. Ekkor a megoldás $r < r_0$ tartományban $\chi(r) = \sin(q \cdot r)$, illetve az $r > r_0$ tartományon: $\chi(r) = e^{-\kappa r}$ (a hullámfüggvényt később, ha akarjuk – de nem fogjuk – normálhatjuk). χ és a deriváltja a határon menjen át simán, azaz



Ez már egy igen egyszerű potenciál,
erre a S. egyenletet is meg tudjuk oldani.

$$\left.\frac{\chi'(r)}{\chi(r)}\right|_{r<r_0} = q\,\mathrm{ctg}(qr) = -\kappa$$

.

Ha ennek van megoldása, akkor létezik kötött állapot.

$$\hbar\, q = \sqrt{2m(V_0 - E)}$$

$$\hbar\, \kappa = \sqrt{2m|E|}$$

$$q \cdot \mathrm{ctg}(qr_0) < 0$$

$$E_B := -E$$

. Épp akkor jelenik meg a kötött állapot, amikor

$$q^* \cdot \mathrm{ctg}(q^* r) = 0$$

$$E_B = 0$$

$$\operatorname{ctg} q^* r_0 = 0$$

$$q^* r_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$q^{*2} r_0^2 = \pi^2/4$$

$$\frac{2mV_0^* r_0^2}{\hbar^2} = \frac{\pi^2}{4}$$

így végül

$$V_0^* = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8mr_0^2}$$

Ha $V_0 \geq V_0^*$, akkor van kötött állapot.

Ha $V_0 < V_0^*$, akkor nincs kötött állapot.