Tehát előző órán láttuk, hogy u_k és v_k -ra az alábbi feltételek adódtak: $u_k^2 - v_k^2 = 1$ és $[e_{\mathbf{k}} + nv(\mathbf{k})]u_k v_k + nv(\mathbf{k})\left(u_k^2 + v_k^2\right) = 0$. Utóbbi abból jött, hogy azt akartuk, hogy $\alpha_{\mathbf{k}}$ és $\alpha_{\mathbf{k}}^+$ bevezetésével a Hamilton operátor diagonális legyen, azaz a $H = U + H_{11} + H_{20}$ egyenletből a H_{20} tagra $H_{20} = 0$ fennálljon. $u_k = \mathrm{ch}\,\chi_k$ és $v_k = \mathrm{sh}\,\chi_k$ választással $u_k^2 - v_k^2 = 1$ egyenletet azonnal kielégítettük.

A sh és ch függvények azonosságait felhasználva vegyük észre a következőket!

$$2u_k v_k = \mathrm{sh}(2\chi_k)$$

$$u_k^2 + v_k^2 = \mathrm{ch}(2\chi_k)$$

Felhasználva, hogy H -t diagonálisnak szeretnénk,

$$\mathrm{th}(2\chi_k) = -\frac{nv(\mathbf{k})}{e_{\mathbf{k}} + nv(\mathbf{k})}$$

adódik. Ebből $\mathrm{sh}(2\chi_k) = -\frac{nv(\mathbf{k})}{E(\mathbf{k})}$ és $\mathrm{ch}(2\chi_k) = \frac{e_{\mathbf{k}} + nv(\mathbf{k})}{E(\mathbf{k})}$ adódik, ahol $E(\mathbf{k})$ még nem biztos, hogy épp a korábban keresett. Visszaírva azonban a sh és ch függvények kétszeres szögértékeit az egyszeresekre, s ezt behelyettesítve a még ki nem elégített egyenletre, láthatjuk, hogy az teljesül, így $E(\mathbf{k})$ valóban a keresett mennyiséggel egyenlő.

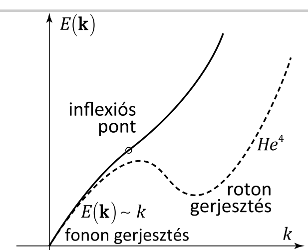
Ebből már kifejezhető $E(\mathbf{k})$:

$$E(\mathbf{k}) = \sqrt{[e_{\mathbf{k}} + nv(\mathbf{k})]^2 + n^2 v^2(\mathbf{k})} = E_{\mathbf{k}}$$

továbbá

$$u_k^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{e_{\mathbf{k}} + nv(\mathbf{k})}{E_{\mathbf{k}}} + 1\right]$$

$$v_k^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{e_{\mathbf{k}} + nv(\mathbf{k})}{E_{\mathbf{k}}} - 1\right]$$



A kvázirészecskék diszperziós relációja

Ábrázolhatjuk az $E(\mathbf{k})$ függvényt. Kicsi $\mathbf{k}$ esetén $E_{\mathbf{k}} \approx \sqrt{2nv(0)e_{\mathbf{k}}} \sim k$, mivel $e_{\mathbf{k}} \sim \mathbf{k}^2$, tehát lineárisként indul a függvény. Ezeket a gerjesztéseket nevezhetjük fononoknak. A közelítésben feltettük, hogy a kölcsönhatás gyenge, így az erős kölcsönhatásokat nem tudja leírni, ami pl. a rotonokat okozza (pl He^4 esetében). Állítás, hogy a gyenge kölcsönhatású közelítés az inflexiós környékét jól leírja.

A kondenzátumon kívüli atomok száma

$$N' = \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \langle BEC|a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}}|BEC\rangle = \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \langle BEC|v_k^2 \alpha_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}}^+ + \underbrace{u_k^2 \alpha_{\mathbf{k}}^+ \alpha_{\mathbf{k}}}_{0\text{ járulék}} + \ldots|BEC\rangle = \sum_{\mathbf{k}\neq 0} v_k^2 = V\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} v_k^2$$

Ahol az összegre vonatkozó közelítést (határátmenetet) alkalmaztuk. A szög szerinti integrálást elvégezve

$$N' = V\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dk \cdot k^2 \frac{1}{2}\left[-1 + \frac{e_k + nv(0)}{E_k}\right]$$

Használjuk a $\frac{e_k}{nv(0)} = z^2$ helyettesítést, ekkor $z = k\xi_B$ és $\xi_B = \frac{\hbar}{\sqrt{2mnv(0)}}$, így

$$N' = \frac{V}{4\pi^2}\frac{1}{\xi_B^3}\int_0^\infty dz\cdot z^2\left[-1+\frac{z^2+1}{\left(z^4+2z^2\right)^{1/2}}\right] = \frac{8N}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{na^3}+...$$

ahol az a szórási hosszt a $v(0) = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$ egyenlet definiálja. Ez a potenciál az $\mathbf{r}$ helyen:

$$v(\mathbf{r}) = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}\delta^{(3)}(\mathbf{r})$$

Láthatjuk, hogy $a = 0$ esetén – ami a kölcsönhatás nélküli gáznak felel meg – nincs a kondenzátumon kívül részecske, azaz $N' = 0$.

$$N_0 = N - N' = N\left[1-\frac{8}{3\sqrt{\pi}}\cdot\underbrace{\sqrt{na^3}}_{\text{D.lan param, }\ll 1}+...\right]$$

Kondenzált Bose rendszerek véges hőmérsékleten

Perturbációszámítás, nem ideális gáz vizsgálata

A Hamilton operátor:

$$H = \sum_{\mathbf{k}} e_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2V}\sum_{\substack{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4\\ \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4}} v(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3) a_{\mathbf{k}_1}^+ a_{\mathbf{k}_2}^+ a_{\mathbf{k}_3} a_{\mathbf{k}_4}$$

ahol $v(\mathbf{k}) = 4\pi\hbar^2 a/m$. $K = H - \mu N$.

$T < T_c$ esetén előírjuk, hogy $\langle a_0\rangle = \sqrt{N_0}$. Ez persze csalás, de nem baj. Milyen szimmetria sérül ezáltal? Nézzük az $a_{\mathbf{k}} \mapsto a_{\mathbf{k}} e^{i\Theta}$ és a $a_{\mathbf{k}}^+ \mapsto a_{\mathbf{k}}^+ e^{-i\Theta}$ transzformációt! Ez a (globális) $U(1)$ szimmetria (szimmetria, azaz a transzformációt elvégezhetjük a mérhető paraméterek változása nélkül). A megadott előírás ezt sérti. Goldstone tétele szerint pedig sérülő folytonos (globális) szimmetria gap nélküli gerjesztéseket eredményez. Vezessük be a

$$b_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}} - \sqrt{N_0}\delta_{\mathbf{k},0}$$

és a

$$b_{\mathbf{k}}^+ = a_{\mathbf{k}}^+ - \sqrt{N_0}\delta_{\mathbf{k},0}$$

jelöléseket! Most írjuk be ezt a Hamilton operátorba! Vigyázat, hosszú lesz!

$$\sum_{\mathbf{k}}(e_k-\mu)a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}}(e_k-\mu)\left(b_{\mathbf{k}}^+ + \sqrt{N_0}\delta_{\mathbf{k},0}\right)\left(b_{\mathbf{k}} + \sqrt{N_0}\delta_{\mathbf{k},0}\right) =$$

$$= \sum_{\mathbf{k}}(e_k-\mu)\left[b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}} + N_0\left(b_{\mathbf{k}}^+ + b_{\mathbf{k}}\right)\delta_{\mathbf{k},0} + N_0\delta_{\mathbf{k},0}\right] = \underbrace{\sum_{\mathbf{k}}\left(e_{\mathbf{k}}-\mu\right)b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}}}_{K_0} - \underbrace{\mu\sqrt{N}\left(b_0+b_0^+\right)}_{K_1'} - \underbrace{\mu N_0}_{K_0'}$$

A kölcsönhatási rész:

$$\frac{v(0)}{2V}\cdot\sum_{\substack{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4\\ \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4}} a_{\mathbf{k}_1}^+ a_{\mathbf{k}_2}^+ a_{\mathbf{k}_3} a_{\mathbf{k}_4} = K_{I,4} + K_{I,3} + K_{I,1} + K_{I,0}$$

ahol

$$K_{I,4} = \frac{1}{2V} \cdot \sum_{\substack{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4 \\ \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4}} b^+_{\mathbf{k}_1} b^+_{\mathbf{k}_2} b_{\mathbf{k}_3} b_{\mathbf{k}_4} v(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3)$$

$$K_{I,3} = \frac{\sqrt{N_0}\, v(0)}{2V} \cdot \sum_{\substack{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4 \\ \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4}} \left(b^+_{\mathbf{k}_1} b^+_{\mathbf{k}_2} b_{\mathbf{k}_3} \delta_{\mathbf{k}_4,0} + b^+_{\mathbf{k}_1} b^+_{\mathbf{k}_2} b_{\mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_3,0} + b^+_{\mathbf{k}_1} b_{\mathbf{k}_3} b_{\mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_2,0} + b^+_{\mathbf{k}_2} b_{\mathbf{k}_3} b_{\mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_1,0} \right)$$

$$K_{I,2} = \frac{N_0}{2V} \cdot \sum_{\substack{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4 \\ \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4}} \begin{pmatrix} b^+_{\mathbf{k}_1} b^+_{\mathbf{k}_2} \delta_{\mathbf{k}_3,0} \delta_{\mathbf{k}_4,0} + b^+_{\mathbf{k}_1} \delta_{\mathbf{k}_2,0} b_{\mathbf{k}_3} \delta_{\mathbf{k}_4,0} + \delta_{\mathbf{k}_1,0} b^+_{\mathbf{k}_2} b_{\mathbf{k}_3} \delta_{\mathbf{k}_4,0} + \\ + \delta_{\mathbf{k}_1,0} b^+_{\mathbf{k}_2} \delta_{\mathbf{k}_3,0} b_{\mathbf{k}_4} + b^+_{\mathbf{k}_1} \delta_{\mathbf{k}_2,0} \delta_{\mathbf{k}_3,0} b_{\mathbf{k}_4} + \delta_{\mathbf{k}_1,0} \delta_{\mathbf{k}_2,0} b_{\mathbf{k}_3} b_{\mathbf{k}_4} \end{pmatrix} v(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3)$$

$$K_{I,1} = \frac{N_0^{3/2}}{2V} v(0) \left(2b_0^+ + 2b_0 \right)$$

valamint

$$K_{I,0} = \frac{N_0^2}{2V} v(0)$$

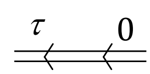
Így tömör írásmódban

$$U = K_0 + \sum_{i=0}^{4} K_{I,i} + K_0' + K_1'$$

Green-függvény

Definiáljuk a következő Green-függvényeket!

$$G_{1,1}(\mathbf{k},\tau) := -\left\langle T_\tau \left[b_{\mathbf{k}}(\tau) \cdot b^+_{\mathbf{k}}(0) \right] \right\rangle$$



ahol az operátor τ függése ezt jelenti:

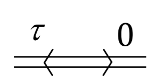
$$O(\tau) = e^{\frac{K\tau}{\hbar}} O_S e^{-\frac{K\tau}{\hbar}}$$

várható értéke

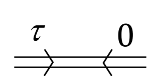
$$\langle O \rangle = Sp(\rho_G O)$$

ahol $\rho_G = e^{\frac{-\beta K}{Z_G}}$ Ebből látszik, hogy a vannak olyan operátorok, melyek várható értéke nem 0, noha megváltoztatják a részecskeszámot. Soktestprobéma I órán ezt a Green-függvényt használtuk. Az új, további függvények:

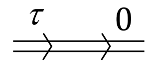
$$G_{1,2}(\mathbf{k},\tau) = -\left\langle T_\tau [b_{-\mathbf{k}}(\tau) b_{\mathbf{k}}(0)] \right\rangle$$



$$G_{2,1}(\mathbf{k},\tau) = -\left\langle T_\tau \left[b^+_{-\mathbf{k}}(\tau) b^+_{\mathbf{k}}(0) \right] \right\rangle$$



$$G_{2,2}(\mathbf{k},\tau) = -\langle T_\tau\left[b^+_{-\mathbf{k}}(\tau)b_{-\mathbf{k}}(0)\right]\rangle$$



A fenti függvényekben T_τ időrendező operátor: a nagyobb argumentumú kerül „balra”, azonos argumentum esetén pedig a keresztes kerül „balra”.

A Green függvények között az alábbi összefüggések érvényesek.

$$G_{2,1}(\mathbf{k},\tau) = G_{1,2}(-\mathbf{k},\, -\tau)$$

$$G_{1,1}(\mathbf{k},\tau) = G_{2,2}(-\mathbf{k},\tau)$$

Ezeket a függvényeket mátrixba foglalhatjuk:

$$G(\mathbf{k},\tau) = \begin{pmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} \\ G_{2,1} & G_{2,2} \end{pmatrix}$$

Általános összefüggés, hogy

$$G_{\alpha,\beta}(\mathbf{k},i\omega_n) = \int_0^{\beta\hbar} G_{\alpha,\beta}(\mathbf{k},\tau)e^{i\omega_n\tau}d\tau$$

ahol $\omega_n = \frac{2n\pi}{\beta\hbar}$, mivel valamennyi $G_{\alpha,\beta}$ periodikus $\beta\hbar$ szerint a 2. argumentumában, illetve

$$G_{\alpha,\beta}(\mathbf{k},\tau) = \frac{1}{\beta\hbar}\sum_n G(\mathbf{k},i\omega_n)e^{-i\omega_n\tau}$$

A szabad Green-függvények:

$$G^{(0)}_{1,1}(\mathbf{k},i\omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - \hbar^{-1}(e_k-\mu)}$$

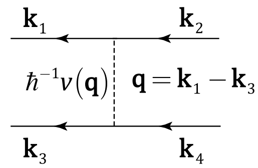
$$G^{0}_{2,2}(\mathbf{k},i\omega_n) = \frac{1}{-i\omega_n - \hbar^{-1}(e_k-\mu)}$$

$$G^{0}_{1,2}(\mathbf{k},i\omega_n) = 0 = G^{0}_{2,1}(\mathbf{k},i\omega_n)$$

Feynman-diagramok

Milyen Feynman-digramok fordulhatnak elő? A perturbáció most K_1' és $K_{I,i}$, $i \in \{1,...,4\}$ (Soktestprobléma I-ben csak a $K_{I,4}$ volt).

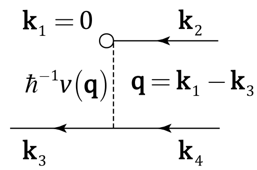
$$K_{I,4}=\frac{1}{2V}\cdot\sum_{\substack{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4\\ \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4}} b^+_{\mathbf{k}_1}b^+_{\mathbf{k}_2}b_{\mathbf{k}_3}b_{\mathbf{k}_4}v(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3)$$



(a tavalyiaknak megfelelően)

Az egyik tagja a $K_{I,3}$ -nak:

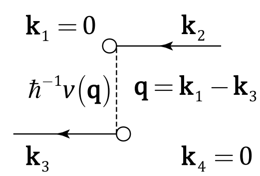
$$\frac{\sqrt{N_0}\,v(0)}{2V}\cdot\sum_{\substack{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4\\ \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4}} b^+_{\mathbf{k}_1}b^+_{\mathbf{k}_2}b_{\mathbf{k}_3}\delta_{\mathbf{k}_4,0}$$



a kör egy $\sqrt{N_0}$ szorzót jelöl

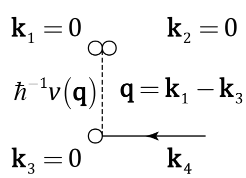
Az egyik tagja a $K_{I,2}$ -nek

$$\frac{N_0}{2V}\cdot\sum_{\substack{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4\\ \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4}} \delta_{\mathbf{k}_1,0}b^+_{\mathbf{k}_2}b_{\mathbf{k}_3}\delta_{\mathbf{k}_4,0}v(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3)$$

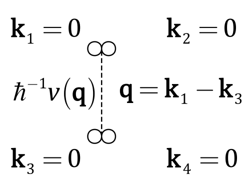


$K_{I,1}$ eltüntető részéhez tartozik

$$\frac{N_0^{3/2}}{2V}v(0)b_0$$



$$K_{I,0}=\frac{N_0^2}{2V}v(0)$$

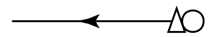


K_1' egyik tagja (az eltüntető operátorral)

$$(-\mu)\sqrt{N_0}b_0$$

a háromszög a $-\mu$ -vel való szorzást jelöli

K_1' másik tagja (a keltő operátorral):

$(-\mu)\sqrt{N_0}b_0^+$ 

$K_0{}'$